

ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت (۱)

(نسخه یکپارچه - ۲۰ فصل + پیوست‌ها)

مجید کوکبی

۱۳ مهر ۱۴۰۵

فهرست مطالب

۲	فصل ۱: مجموعه‌ها	۱
۲	۱.۱ چکیده	۱.۱
۲	۲.۱ اهداف یادگیری	۲.۱
۲	۳.۱ مقدمه طنز	۳.۱
۲	۴.۱ مفاهیم اصلی	۴.۱
۲	۱.۴.۱ مفهوم ۱: مجموعه، عضو، و نمادگذاری	۱.۴.۱
۲	۲.۴.۱ مفهوم ۲: عملیات مجموعه‌ها	۲.۴.۱
۳	۳.۴.۱ مفهوم ۳: قوانین جبر مجموعه‌ها	۳.۴.۱
۳	۴.۴.۱ مفهوم ۴: ضرب دکارتی	۴.۴.۱
۳	۵.۴.۱ مفهوم ۵: اصل شمول-طرد	۵.۴.۱
۳	۶.۴.۱ مفهوم ۶: افراز	۶.۴.۱
۳	۵.۱ مثال‌های حل شده	۵.۱
۴	۶.۱ اشتباهات رایج	۶.۱
۴	۷.۱ خلاصه فصل	۷.۱
۴	۸.۱ خودآزمایی	۸.۱
۴	۱.۸.۱ چهارگزینه‌ای	۱.۸.۱
۵	۲.۸.۱ پاسخ چهارگزینه‌ای	۲.۸.۱
۵	۳.۸.۱ تشریحی	۳.۸.۱
۵	۹.۱ منابع	۹.۱
۵	فصل ۲: رابطه و تابع (نسخه توسعه یافته)	۲
۵	۱.۲ چکیده	۱.۲
۵	۲.۲ اهداف یادگیری	۲.۲
۵	۳.۲ مقدمه طنز	۳.۲
۵	۴.۲ مفاهیم اصلی	۴.۲
۵	۱.۴.۲ مفهوم ۱: زوج مرتب و ضرب دکارتی	۱.۴.۲
۶	۲.۴.۲ مفهوم ۲: رابطه و انواع آن	۲.۴.۲
۶	۳.۴.۲ مفهوم ۳: دامنه، برد، هم‌دامنه	۳.۴.۲
۶	۴.۴.۲ مفهوم ۴: تابع	۴.۴.۲
۶	۵.۴.۲ مفهوم ۵: توابع یک‌به‌یک	۵.۴.۲
۶	۶.۴.۲ مفهوم ۶: توابع پوشا	۶.۴.۲
۶	۷.۴.۲ مفهوم ۷: دوسویه و معکوس	۷.۴.۲
۶	۸.۴.۲ مفهوم ۸: ترکیب توابع	۸.۴.۲

۶	۹.۴.۲	مفهوم ۹: توابع چندمتغیره	۶
۶	۱۰.۴.۲	مفهوم ۱۰: انواع تابع	۶
۶	۵.۲	مثال‌های حل شده	۶
۸	۶.۲	اشتباهات رایج	۸
۸	۷.۲	خلاصه فصل	۸
۸	۸.۲	خودآزمایی	۸
۸	۱.۸.۲	چهارگزینه‌ای (۱۲ سوال)	۸
۸	۲.۸.۲	پاسخ	۸
۹	۳	فصل ۳: توابع خطی و درجه دوم	۹
۹	۱.۳	چکیده	۹
۹	۲.۳	اهداف یادگیری	۹
۹	۳.۳	مقدمه طنز	۹
۹	۴.۳	مفاهیم اصلی	۹
۹	۱.۴.۳	مفهوم ۱: تابع خطی	۹
۹	۲.۴.۳	مفهوم ۲: یافتن معادله خط	۹
۹	۳.۴.۳	مفهوم ۳: تابع درجه دوم	۹
۹	۴.۴.۳	مفهوم ۴: نقطه سربه‌سر	۹
۹	۵.۴.۳	مفهوم ۵: بهینه‌سازی	۹
۹	۵.۳	مثال‌های حل شده	۹
۱۰	۶.۳	اشتباهات رایج	۱۰
۱۰	۷.۳	خلاصه فصل	۱۰
۱۱	۸.۳	خودآزمایی	۱۱
۱۱	۱.۸.۳	چهارگزینه‌ای (۸ سوال)	۱۱
۱۱	۲.۸.۳	پاسخ	۱۱
۱۱	۴	فصل ۴: توابع نمایی و لگاریتمی	۱۱
۱۱	۱.۴	چکیده	۱۱
۱۱	۲.۴	اهداف یادگیری	۱۱
۱۱	۳.۴	مقدمه طنز	۱۱
۱۱	۴.۴	مفاهیم اصلی	۱۱
۱۱	۱.۴.۴	مفهوم ۱: تابع نمایی	۱۱
۱۲	۲.۴.۴	مفهوم ۲: عدد نپر	۱۲
۱۲	۳.۴.۴	مفهوم ۳: تابع لگاریتمی	۱۲
۱۲	۴.۴.۴	مفهوم ۴: قوانین لگاریتم	۱۲
۱۲	۵.۴.۴	مفهوم ۵: معادلات نمایی	۱۲
۱۲	۶.۴.۴	مفهوم ۶: معادلات لگاریتمی	۱۲
۱۲	۷.۴.۴	مفهوم ۷: نامعادلات	۱۲
۱۲	۸.۴.۴	مفهوم ۸: فرمول‌های مالی	۱۲
۱۳	۵.۴	مثال‌های حل شده	۱۳
۱۴	۶.۴	اشتباهات رایج	۱۴
۱۴	۷.۴	خلاصه فصل	۱۴
۱۴	۸.۴	خودآزمایی	۱۴
۱۴	۱.۸.۴	چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)	۱۴
۱۵	۲.۸.۴	پاسخ	۱۵

۱۵	فصل ۵: توابع خاص	۵
۱۵	۱.۵ چکیده	
۱۵	۲.۵ اهداف یادگیری	
۱۵	۳.۵ مقدمه طنز	
۱۵	۴.۵ مفاهیم اصلی	
۱۵	۱.۴.۵ مفهوم ۱: تابع زوج	
۱۵	۲.۴.۵ مفهوم ۲: تابع فرد	
۱۵	۳.۴.۵ مفهوم ۳: نه زوج، نه فرد	
۱۶	۴.۴.۵ مفهوم ۴: تابع معکوس	
۱۶	۵.۴.۵ مفهوم ۵: قدر مطلق	
۱۶	۶.۴.۵ مفهوم ۶: جزء صحیح	
۱۶	۷.۴.۵ مفهوم ۷: سقف	
۱۶	۸.۴.۵ مفهوم ۸: علامت	
۱۶	۹.۴.۵ مفهوم ۹: پله‌ای	
۱۶	۱۰.۴.۵ مفهوم ۱۰: یکنوا	
۱۶	۵.۵ مثال‌های حل شده	
۱۸	۶.۵ اشتباهات رایج	
۱۸	۷.۵ خلاصه فصل	
۱۸	۸.۵ خودآزمایی	
۱۸	۱.۸.۵ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)	
۱۹	۲.۸.۵ پاسخ	
۱۹	فصل ۶: اصول شمارش	۶
۱۹	۱.۶ چکیده	
۱۹	۲.۶ اهداف یادگیری	
۱۹	۳.۶ مقدمه طنز	
۱۹	۴.۶ مفاهیم اصلی	
۱۹	۱.۴.۶ مفهوم ۱: فاکتوریل	
۱۹	۲.۴.۶ مفهوم ۲: اصل ضرب	
۱۹	۳.۴.۶ مفهوم ۳: اصل جمع	
۱۹	۴.۴.۶ مفهوم ۴: تفاوت ضرب و جمع	
۲۰	۵.۴.۶ مفهوم ۵: جایگشت	
۲۰	۶.۴.۶ مفهوم ۶: جایگشت با تکرار	
۲۰	۷.۴.۶ مفهوم ۷: جایگشت دوری	
۲۰	۸.۴.۶ مفهوم ۸: اصل متمم	
۲۰	۹.۴.۶ مفهوم ۹: ترکیب (پیش‌درآمد)	
۲۰	۱۰.۴.۶ مفهوم ۱۰: قواعد تشخیص	
۲۰	۵.۶ مثال‌های حل شده	
۲۲	۶.۶ اشتباهات رایج	
۲۲	۷.۶ خلاصه فصل	
۲۲	۸.۶ خودآزمایی	
۲۲	۱.۸.۶ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)	
۲۳	۲.۸.۶ پاسخ	
۲۳	فصل ۷: آنالیز ترکیبی	۷
۲۳	۱.۷ چکیده	
۲۳	۲.۷ اهداف یادگیری	
۲۳	۳.۷ مقدمه طنز	

۲۳	مفاهیم اصلی	۴.۷
۲۳	مفهوم ۱: ترکیب	۱.۴.۷
۲۳	مفهوم ۲: خواص ترکیب	۲.۴.۷
۲۴	مفهوم ۳: قضیه دوجمله‌ای	۳.۴.۷
۲۴	مفهوم ۴: مثلث پاسکال	۴.۴.۷
۲۴	مفهوم ۵: اتحادهای مهم	۵.۴.۷
۲۴	مفهوم ۶: ترکیب با تکرار	۶.۴.۷
۲۴	مفهوم ۷: کاربرد در احتمال	۷.۴.۷
۲۴	مفهوم ۸: تخصیص منابع	۸.۴.۷
۲۴	مثال‌های حل شده	۵.۷
۲۶	اشتباهات رایج	۶.۷
۲۶	خلاصه فصل	۷.۷
۲۶	خودآزمایی	۸.۷
۲۶	چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)	۱.۸.۷
۲۷	پاسخ	۲.۸.۷

۲۷	فصل ۸: دستگاه مختصات و نمودار	۸
۲۷	چکیده	۱.۸
۲۷	اهداف یادگیری	۲.۸
۲۷	مقدمه طنز	۳.۸
۲۷	مفاهیم اصلی	۴.۸
۲۷	مفهوم ۱: مختصات دکارتی	۱.۴.۸
۲۷	مفهوم ۲: فاصله	۲.۴.۸
۲۸	مفهوم ۳: نقطه میانی	۳.۴.۸
۲۸	مفهوم ۴: شیب	۴.۴.۸
۲۸	مفهوم ۵: معادله خط	۵.۴.۸
۲۸	مفهوم ۶: رسم توابع	۶.۴.۸
۲۸	مفهوم ۷: تبدیلات	۷.۴.۸
۲۸	مفهوم ۸: توابع با محدودیت	۸.۴.۸
۲۸	مفهوم ۹: چندناحیه‌ای	۹.۴.۸
۲۸	مفهوم ۱۰: تحلیل بصری	۱۰.۴.۸
۲۹	مثال‌های حل شده	۵.۸
۳۰	اشتباهات رایج	۶.۸
۳۱	خلاصه فصل	۷.۸
۳۱	خودآزمایی	۸.۸
۳۱	چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)	۱.۸.۸
۳۱	پاسخ	۲.۸.۸

۳۱	فصل ۹: کاربردهای شمارش در مدیریت	۹
۳۱	چکیده	۱.۹
۳۲	اهداف یادگیری	۲.۹
۳۲	مقدمه طنز	۳.۹
۳۲	مفاهیم اصلی	۴.۹
۳۲	مفهوم ۱: فضای نمونه و پیشامد	۱.۴.۹
۳۲	مفهوم ۲: احتمال کلاسیک	۲.۴.۹
۳۲	مفهوم ۳: احتمال با ترکیب	۳.۴.۹
۳۲	مفهوم ۴: احتمال شرطی	۴.۴.۹
۳۲	مفهوم ۵: استقلال	۵.۴.۹

۳۲	۶.۴.۹	مفهوم ۶: قانون احتمال کل
۳۲	۷.۴.۹	مفهوم ۷: بیز
۳۲	۸.۴.۹	مفهوم ۸: امید ریاضی
۳۲	۹.۴.۹	مفهوم ۹: ارزش مورد انتظار
۳۳	۱۰.۴.۹	مفهوم ۱۰: درخت تصمیم
۳۳	۵.۹	مثال‌های حل شده
۳۴	۶.۹	اشتباهات رایج
۳۵	۷.۹	خلاصه فصل
۳۵	۸.۹	خودآزمایی
۳۵	۱.۸.۹	چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)
۳۵	۲.۸.۹	پاسخ

۱۰ فصل ۱۰: حد و خواص آن

۳۵	۱.۱۰	چکیده
۳۶	۲.۱۰	اهداف یادگیری
۳۶	۳.۱۰	مقدمه طنز
۳۶	۴.۱۰	مفاهیم اصلی
۳۶	۱.۴.۱۰	مفهوم ۱: شهود حد
۳۶	۲.۴.۱۰	مفهوم ۲: حد چپ و راست
۳۶	۳.۴.۱۰	مفهوم ۳: تعریف اپسیلون-دلتا
۳۶	۴.۴.۱۰	مفهوم ۴: قوانین حد
۳۶	۵.۴.۱۰	مفهوم ۵: چندجمله‌ای
۳۶	۶.۴.۱۰	مفهوم ۶: کسری و گنگ
۳۷	۷.۴.۱۰	مفهوم ۷: مثلثاتی
۳۷	۸.۴.۱۰	مفهوم ۸: نمایی و لگاریتمی
۳۷	۹.۴.۱۰	مفهوم ۹: حد در بی‌نهایت
۳۷	۱۰.۴.۱۰	مفهوم ۱۰: فرم‌های مبهم
۳۷	۱۱.۴.۱۰	مفهوم ۱۱: قضیه فشردگی
۳۷	۱۲.۴.۱۰	مفهوم ۱۲: مجانب
۳۷	۵.۱۰	مثال‌های حل شده
۳۹	۶.۱۰	اشتباهات رایج
۳۹	۷.۱۰	خلاصه فصل
۳۹	۸.۱۰	خودآزمایی
۳۹	۱.۸.۱۰	چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)
۴۰	۲.۸.۱۰	پاسخ

۱۱ فصل ۱۱: حد چپ و راست

۴۰	۱.۱۱	چکیده
۴۰	۲.۱۱	اهداف یادگیری
۴۰	۳.۱۱	مقدمه طنز
۴۰	۴.۱۱	مفاهیم اصلی
۴۰	۱.۴.۱۱	مفهوم ۱: حد چپ
۴۰	۲.۴.۱۱	مفهوم ۲: حد راست
۴۰	۳.۴.۱۱	مفهوم ۳: شرط وجود حد
۴۰	۴.۴.۱۱	مفهوم ۴: توابع پله‌ای
۴۱	۵.۴.۱۱	مفهوم ۵: قدر مطلق
۴۱	۶.۴.۱۱	مفهوم ۶: جزء صحیح
۴۱	۷.۴.۱۱	مفهوم ۷: سقف

۴۱	۸.۴.۱۱ مفهوم ۸: تعرفه‌ای
۴۱	۹.۴.۱۱ مفهوم ۹: قطعه‌ای
۴۱	۱۰.۴.۱۱ مفهوم ۱۰: پرش
۴۱	۵.۱۱ مثال‌های حل شده
۴۳	۶.۱۱ اشتباهات رایج
۴۳	۷.۱۱ خلاصه فصل
۴۳	۸.۱۱ خودآزمایی
۴۳	۱.۸.۱۱ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)
۴۴	۲.۸.۱۱ پاسخ

۴۴	۱۲ فصل ۱۲: پیوستگی
۴۴	۱.۱۲ چکیده
۴۴	۲.۱۲ اهداف یادگیری
۴۴	۳.۱۲ مقدمه طنز
۴۴	۴.۱۲ مفاهیم اصلی
۴۴	۱.۴.۱۲ مفهوم ۱: پیوستگی در نقطه
۴۴	۲.۴.۱۲ مفهوم ۲: پیوستگی چپ و راست
۴۴	۳.۴.۱۲ مفهوم ۳: انواع ناپیوستگی
۴۴	۴.۴.۱۲ مفهوم ۴: پیوستگی روی بازه
۴۵	۵.۴.۱۲ مفهوم ۵: قضایای پیوستگی
۴۵	۶.۴.۱۲ مفهوم ۶: قطعه‌ای
۴۵	۷.۴.۱۲ مفهوم ۷: IVT
۴۵	۸.۴.۱۲ مفهوم ۸: EVT
۴۵	۹.۴.۱۲ مفهوم ۹: پیوستگی و حل معادلات
۴۵	۱۰.۴.۱۲ مفهوم ۱۰: تعرفه‌ای
۴۵	۵.۱۲ مثال‌های حل شده
۴۷	۶.۱۲ اشتباهات رایج
۴۷	۷.۱۲ خلاصه فصل
۴۷	۸.۱۲ خودآزمایی
۴۷	۱.۸.۱۲ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)
۴۸	۲.۸.۱۲ پاسخ

۴۸	۱۳ فصل ۱۳: دنباله‌ها
۴۸	۱.۱۳ چکیده
۴۸	۲.۱۳ اهداف یادگیری
۴۸	۳.۱۳ مقدمه طنز
۴۸	۴.۱۳ مفاهیم اصلی
۴۸	۱.۴.۱۳ مفهوم ۱: تعریف دنباله
۴۸	۲.۴.۱۳ مفهوم ۲: دنباله حسابی
۴۹	۳.۴.۱۳ مفهوم ۳: دنباله هندسی
۴۹	۴.۴.۱۳ مفهوم ۴: تفاوت
۴۹	۵.۴.۱۳ مفهوم ۵: فیبوناچی
۴۹	۶.۴.۱۳ مفهوم ۶: همگرایی
۴۹	۷.۴.۱۳ مفهوم ۷: قوانین حد
۴۹	۸.۴.۱۳ مفهوم ۸: بازگشتی
۴۹	۹.۴.۱۳ مفهوم ۹: میانگین
۴۹	۱۰.۴.۱۳ مفهوم ۱۰: بهره مرکب

۴۹	۱۱.۴.۱۳ مفهوم ۱۱: اقساط
۴۹	۱۲.۴.۱۳ مفهوم ۱۲: ارزش فعلی
۴۹	۱۳.۴.۱۳ مفهوم ۱۳: استهلاك
۵۰	۱۴.۴.۱۳ مفهوم ۱۴: پیش‌بینی فروش
۵۰	۱۵.۴.۱۳ مفهوم ۱۵: جمع کل
۵۰	۵.۱۳ مثال‌های حل شده
۵۲	۶.۱۳ اشتباهات رایج
۵۲	۷.۱۳ خلاصه فصل
۵۲	۸.۱۳ خودآزمایی
۵۲	۱.۸.۱۳ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)
۵۲	۲.۸.۱۳ پاسخ

۱۴ فصل ۱۴: مشتق و مفاهیم آن

۵۳	۱.۱۴ چکیده
۵۳	۲.۱۴ اهداف یادگیری
۵۳	۳.۱۴ مقدمه طنز
۵۳	۴.۱۴ مفاهیم اصلی
۵۳	۱.۴.۱۴ مفهوم ۱: شهود مشتق
۵۳	۲.۴.۱۴ مفهوم ۲: تعریف دقیق
۵۳	۳.۴.۱۴ مفهوم ۳: تفسیر هندسی
۵۳	۴.۴.۱۴ مفهوم ۴: تفسیر فیزیکی
۵۳	۵.۴.۱۴ مفهوم ۵: نمادها
۵۳	۶.۴.۱۴ مفهوم ۶: مشتق‌پذیری و پیوستگی
۵۳	۷.۴.۱۴ مفهوم ۷: مشتق چپ و راست
۵۴	۸.۴.۱۴ مفهوم ۸: نقاط غیرمشتق‌پذیر
۵۴	۹.۴.۱۴ مفهوم ۹: مشتق مرتبه بالاتر
۵۴	۱۰.۴.۱۴ مفهوم ۱۰: قوانین پایه
۵۴	۱۱.۴.۱۴ مفهوم ۱۱: زنجیره‌ای
۵۴	۱۲.۴.۱۴ مفهوم ۱۲: نمایی و لگاریتمی
۵۴	۱۳.۴.۱۴ مفهوم ۱۳: تحلیل نهایی
۵۴	۱۴.۴.۱۴ مفهوم ۱۴: کشش
۵۴	۱۵.۴.۱۴ مفهوم ۱۵: تقریب خطی
۵۴	۵.۱۴ مثال‌های حل شده
۵۶	۶.۱۴ اشتباهات رایج
۵۶	۷.۱۴ خلاصه فصل
۵۷	۸.۱۴ خودآزمایی
۵۷	۱.۸.۱۴ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)
۵۷	۲.۸.۱۴ پاسخ

۱۵ فصل ۱۵: قوانین مشتق‌گیری

۵۷	۱.۱۵ چکیده
۵۷	۲.۱۵ اهداف یادگیری
۵۷	۳.۱۵ مقدمه طنز
۵۸	۴.۱۵ مفاهیم اصلی
۵۸	۱.۴.۱۵ مفهوم ۱: قانون توان
۵۸	۲.۴.۱۵ مفهوم ۲: ضریب ثابت
۵۸	۳.۴.۱۵ مفهوم ۳: جمع و تفاضل
۵۸	۴.۴.۱۵ مفهوم ۴: ضرب

۵۸	۵.۴.۱۵ مفهوم ۵: تقسیم
۵۸	۶.۴.۱۵ مفهوم ۶: زنجیره‌ای
۵۸	۷.۴.۱۵ مفهوم ۷: نمایی
۵۸	۸.۴.۱۵ مفهوم ۸: لگاریتمی
۵۸	۹.۴.۱۵ مفهوم ۹: مثلثاتی
۵۸	۱۰.۴.۱۵ مفهوم ۱۰: مرتبه بالاتر
۵۸	۱۱.۴.۱۵ مفهوم ۱۱: ضمنی
۵۸	۱۲.۴.۱۵ مفهوم ۱۲: پارامتری
۵۹	۱۳.۴.۱۵ مفهوم ۱۳: معکوس
۵۹	۱۴.۴.۱۵ مفهوم ۱۴: جدول خلاصه
۵۹	۱۵.۴.۱۵ مفهوم ۱۵: کاربرد
۵۹	۵.۱۵ مثال‌های حل شده
۶۱	۶.۱۵ اشتباهات رایج
۶۱	۷.۱۵ خلاصه فصل
۶۱	۸.۱۵ خودآزمایی
۶۱	۱.۸.۱۵ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)
۶۱	۲.۸.۱۵ پاسخ

۶۲	۱۶ فصل ۱۶: دیفرانسیل
۶۲	۱.۱۶ چکیده
۶۲	۲.۱۶ اهداف یادگیری
۶۲	۳.۱۶ مقدمه طنز
۶۲	۴.۱۶ مفاهیم اصلی
۶۲	۱.۴.۱۶ مفهوم ۱: تعریف
۶۲	۲.۴.۱۶ مفهوم ۲: تقریب خطی
۶۲	۳.۴.۱۶ مفهوم ۳: دیفرانسیل کل
۶۲	۴.۴.۱۶ مفهوم ۴: تحلیل حساسیت
۶۲	۵.۴.۱۶ مفهوم ۵: تخمین خطا
۶۲	۶.۴.۱۶ مفهوم ۶: مقایسه
۶۲	۷.۴.۱۶ مفهوم ۷: تقریب توابع پیچیده
۶۳	۸.۴.۱۶ مفهوم ۸: رگرسیون
۶۳	۹.۴.۱۶ مفهوم ۹: بهینه‌سازی
۶۳	۱۰.۴.۱۶ مفهوم ۱۰: بهره مرکب
۶۳	۱۱.۴.۱۶ مفهوم ۱۱: تحلیل هزینه
۶۳	۱۲.۴.۱۶ مفهوم ۱۲: مشتق لگاریتمی
۶۳	۱۳.۴.۱۶ مفهوم ۱۳: اقتصاد کلان
۶۳	۱۴.۴.۱۶ مفهوم ۱۴: خطای تقریب
۶۳	۱۵.۴.۱۶ مفهوم ۱۵: جمع‌بندی
۶۴	۵.۱۶ مثال‌های حل شده
۶۵	۶.۱۶ اشتباهات رایج
۶۶	۷.۱۶ خلاصه فصل
۶۶	۸.۱۶ خودآزمایی
۶۶	۱.۸.۱۶ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)
۶۶	۲.۸.۱۶ پاسخ

۶۶	۱۷ فصل ۱۷: بهینه‌سازی
۶۶	۱.۱۷ چکیده
۶۶	۲.۱۷ اهداف یادگیری
۶۷	۳.۱۷ مقدمه طنز
۶۷	۴.۱۷ مفاهیم اصلی
۶۷	۱.۴.۱۷ مفهوم ۱: نقطه بحرانی
۶۷	۲.۴.۱۷ مفهوم ۲: ماکسیمم و مینیمم موضعی
۶۷	۳.۴.۱۷ مفهوم ۳: ماکسیمم و مینیمم مطلق
۶۷	۴.۴.۱۷ مفهوم ۴: آزمون مشتق اول
۶۷	۵.۴.۱۷ مفهوم ۵: آزمون مشتق دوم
۶۷	۶.۴.۱۷ مفهوم ۶: تقعر و تحدب
۶۷	۷.۴.۱۷ مفهوم ۷: نقطه عطف
۶۷	۸.۴.۱۷ مفهوم ۸: بهینه‌سازی سود
۶۷	۹.۴.۱۷ مفهوم ۹: حداقل هزینه
۶۷	۱۰.۴.۱۷ مفهوم ۱۰: بهینه‌سازی درآمد
۶۸	۱۱.۴.۱۷ مفهوم ۱۱: EOQ
۶۸	۱۲.۴.۱۷ مفهوم ۱۲: لاگرانژ
۶۸	۱۳.۴.۱۷ مفهوم ۱۳: چندمتغیره
۶۸	۱۴.۴.۱۷ مفهوم ۱۴: کشش و بهینه
۶۸	۱۵.۴.۱۷ مفهوم ۱۵: مراحل
۶۸	۵.۱۷ مثال‌های حل شده
۷۰	۶.۱۷ اشتباهات رایج
۷۰	۷.۱۷ خلاصه فصل
۷۰	۸.۱۷ خودآزمایی
۷۰	۱.۸.۱۷ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)
۷۱	۲.۸.۱۷ پاسخ
۷۱	۱۸ فصل ۱۸: بهره و بهره مرکب
۷۱	۱.۱۸ چکیده
۷۱	۲.۱۸ اهداف یادگیری
۷۱	۳.۱۸ مقدمه طنز
۷۱	۴.۱۸ مفاهیم اصلی
۷۱	۱.۴.۱۸ مفهوم ۱: اصطلاحات
۷۱	۲.۴.۱۸ مفهوم ۲: بهره ساده
۷۱	۳.۴.۱۸ مفهوم ۳: بهره مرکب
۷۲	۴.۴.۱۸ مفهوم ۴: مرکب n بار
۷۲	۵.۴.۱۸ مفهوم ۵: پیوسته
۷۲	۶.۴.۱۸ مفهوم ۶: EAR
۷۲	۷.۴.۱۸ مفهوم ۷: نرخ اسمی از مؤثر
۷۲	۸.۴.۱۸ مفهوم ۸: ارزش فعلی
۷۲	۹.۴.۱۸ مفهوم ۹: تنزیل
۷۲	۱۰.۴.۱۸ مفهوم ۱۰: قاعده ۷۲
۷۲	۱۱.۴.۱۸ مفهوم ۱۱: قاعده ۶۹
۷۲	۱۲.۴.۱۸ مفهوم ۱۲: نرخ واقعی
۷۲	۱۳.۴.۱۸ مفهوم ۱۳: ارزش زمانی پول
۷۲	۱۴.۴.۱۸ مفهوم ۱۴: NPV
۷۲	۱۵.۴.۱۸ مفهوم ۱۵: قسط وام
۷۳	۵.۱۸ مثال‌های حل شده

۷۴	۶.۱۸ اشتباهات رایج
۷۵	۷.۱۸ خلاصه فصل
۷۵	۸.۱۸ خودآزمایی
۷۵	۱.۸.۱۸ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)
۷۵	۲.۸.۱۸ پاسخ

۱۹ فصل ۱۹: اقساط و برنامه‌ریزی مالی

۷۵	۱.۱۹ چکیده
۷۵	۲.۱۹ اهداف یادگیری
۷۶	۳.۱۹ مقدمه طنز
۷۶	۴.۱۹ مفاهیم اصلی
۷۶	۱.۴.۱۹ مفهوم ۱: اصطلاحات
۷۶	۲.۴.۱۹ مفهوم ۲: PV اقساط
۷۶	۳.۴.۱۹ مفهوم ۳: FV اقساط
۷۶	۴.۴.۱۹ مفهوم ۴: قسط وام
۷۶	۵.۴.۱۹ مفهوم ۵: پیش‌پرداخت
۷۶	۶.۴.۱۹ مفهوم ۶: جدول استهلاك
۷۶	۷.۴.۱۹ مفهوم ۷: صندوق ذخیره
۷۶	۸.۴.۱۹ مفهوم ۸: Perpetuity
۷۶	۹.۴.۱۹ مفهوم ۹: IRR
۷۷	۱۰.۴.۱۹ مفهوم ۱۰: دوره بازپرداخت
۷۷	۱۱.۴.۱۹ مفهوم ۱۱: ARR
۷۷	۱۲.۴.۱۹ مفهوم ۱۲: بازنشستگی
۷۷	۱۳.۴.۱۹ مفهوم ۱۳: اجاره vs خرید
۷۷	۱۴.۴.۱۹ مفهوم ۱۴: لیزینگ
۷۷	۱۵.۴.۱۹ مفهوم ۱۵: بودجه‌بندی
۷۷	۵.۱۹ مثال‌های حل شده
۷۹	۶.۱۹ اشتباهات رایج
۷۹	۷.۱۹ خلاصه فصل
۷۹	۸.۱۹ خودآزمایی
۷۹	۱.۸.۱۹ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)
۸۰	۲.۸.۱۹ پاسخ

۲۰ فصل ۲۰: کاربردهای مشتق در مالی

۸۰	۱.۲۰ چکیده
۸۰	۲.۲۰ اهداف یادگیری
۸۰	۳.۲۰ مقدمه طنز
۸۰	۴.۲۰ مفاهیم اصلی
۸۰	۱.۴.۲۰ مفهوم ۱: مشتق به عنوان نرخ
۸۰	۲.۴.۲۰ مفهوم ۲: MP MR، MC
۸۰	۳.۴.۲۰ مفهوم ۳: بهینه‌سازی سود
۸۰	۴.۴.۲۰ مفهوم ۴: کشش
۸۰	۵.۴.۲۰ مفهوم ۵: MR و کشش
۸۱	۶.۴.۲۰ مفهوم ۶: بهینه درآمد
۸۱	۷.۴.۲۰ مفهوم ۷: مالیات و کشش
۸۱	۸.۴.۲۰ مفهوم ۸: نرخ رشد
۸۱	۹.۴.۲۰ مفهوم ۹: بهره پیوسته
۸۱	۱۰.۴.۲۰ مفهوم ۱۰: حساسیت PV

۸۱	۱۱.۴.۲۰ مفهوم ۱۱: دیرش
۸۱	۱۲.۴.۲۰ مفهوم ۱۲: NPV
۸۱	۱۳.۴.۲۰ مفهوم ۱۳: EOQ
۸۱	۱۴.۴.۲۰ مفهوم ۱۴: لاگرانژ
۸۱	۱۵.۴.۲۰ مفهوم ۱۵: بتا
۸۱	۵.۲۰ مثال‌های حل شده
۸۳	۶.۲۰ اشتباهات رایج
۸۳	۷.۲۰ خلاصه فصل
۸۴	۸.۲۰ خودآزمایی
۸۴	۱.۸.۲۰ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)
۸۴	۲.۸.۲۰ پاسخ

۸۴	آ پیوست الف: فرمول‌نامه جامع
۸۶	ب پیوست ب: جدول مشتقات پرکاربرد
۸۶	پ پیوست ج: کلید فشرده پاسخ‌های چهارگزینه‌ای
۸۶	ت پیوست د: منابع با ارجاع APA
۸۸	ث پیوست ه: واژه‌نامه فارسی-انگلیسی
۸۸	ج پیوست و: پروژه ۷ روزه (نمونه)
۹۰	چ پیوست ز: برنامه ۶۰ روزه

۱ فصل ۱: مجموعه‌ها

۱.۱ چکیده

مجموعه، سنگ بنای تمام ریاضیات است. در این فصل، مفهوم مجموعه، زیرمجموعه، عملیات اصلی (اجتماع، اشتراک، تفاضل، متمم)، قوانین جبر مجموعه‌ها، ضرب دکارتی، و کاربردهای گسترده مدیریتی را می‌آموزی. هدف نهایی: بتوانی مسائل پیچیده مدیریتی را با زبان مجموعه‌ها مدل کنی و تصمیم بهینه بگیری.

۲.۱ اهداف یادگیری

- تعریف کند: مجموعه، زیرمجموعه، مجموعه تهی، مجموعه جهانی، مجموعه افراز.
- محاسبه کند: اجتماع، اشتراک، تفاضل، متمم، تفاضل متقارن، ضرب دکارتی.
- تحلیل کند: نمودار ون، قوانین دمورگان، اصل شمول-طرد.
- ارزیابی کند: کدام عملیات مجموعه‌ای برای یک مسئله مدیریتی مناسب‌تر است.
- طراحی کند: یک مدل مجموعه‌ای برای بخش‌بندی مشتریان یا منابع انسانی.

۳.۱ مقدمه طنز

تصور کن وارد یک فروشگاه اینترنتی می‌شوی. مدیر فروشگاه می‌خواهد بداند «چه مشتریانی هم گوشی خریده‌اند هم هدفون، اما محافظ صفحه نخریده‌اند». اگر بلد نباشد مجموعه‌ها را جمع بزند، مجبور است کل دیتابیس ۱۰ میلیون رکوردی را دستی برگردد. مجموعه‌ها مثل جعبه‌های اسباب‌بازی هستند: هر جعبه یک برچسب دارد. تو فقط باید بلد باشی جعبه‌ها را روی هم بگذاری (اجتماع)، از هم کم کنی (تفاضل)، یا مشترک‌ها را پیدا کنی (اشتراک).

۴.۱ مفاهیم اصلی

۱.۴.۱ مفهوم ۱: مجموعه، عضو، و نمادگذاری

تعریف: مجموعه گردایه‌ای از اشیاء متمایز است. اگر x عضو A باشد، می‌نویسیم $x \in A$ و اگر نباشد $x \notin A$. انواع مجموعه:

- مجموعه تهی ($\emptyset$)، مجموعه جهانی (U)، متناهی، نامتناهی، تک‌عضوی.

قضیه تعداد زیرمجموعه‌ها: اگر $|A| = n$ ، آنگاه $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.
مثال عددی: اگر $A = \{a, b, c\}$ ، آنگاه $2^3 = 8$ زیرمجموعه دارد.

۲.۴.۱ مفهوم ۲: عملیات مجموعه‌ها

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\} \quad (\text{اجتماع}) \quad (۱)$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \in B\} \quad (\text{اشتراک}) \quad (۲)$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \notin B\} \quad (\text{تفاضل}) \quad (۳)$$

$$A^c = U - A \quad (\text{متمم}) \quad (۴)$$

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) \quad (\text{تفاضل متقارن}) \quad (۵)$$

مثال ساده: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{3\}$, $A - B = \{1, 2\}$.

مثال مدیریتی (دیجی کالا): $A =$ خریداران گوشی، $B =$ خریداران هدفون.

• $A \cap B$: هدف کمپین فروش مکمل.

• $A - B$: پیشنهاد هدفون.

• $B - A$: پیشنهاد گوشی.

۳.۴.۱ مفهوم ۳: قوانین جبر مجموعه‌ها

نام قانون	فرمول
جابه جایی	$A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$
شرکت پذیری	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
توزیع پذیری	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
جذب	$A \cup (A \cap B) = A$
دمورگان	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

۴.۴.۱ مفهوم ۴: ضرب دکارتی

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ و $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.
مثال مدیریتی: ۵ محصول، ۳ منطقه فروش $5 \times 3 = 15 \Rightarrow$ ترکیب.

۵.۴.۱ مفهوم ۵: اصل شمول-طرد

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

۶.۴.۱ مفهوم ۶: افراز

خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های ناتهی $A_1, \dots, A_n$ از U که دوبه‌دو جدا و پوشش کامل باشند.

۵.۱ مثال‌های حل شده

مثال حل شده

مثال ۱: در فروشگاه‌ای ۲۰۰ مشتری، ۱۲۰ نفر A ، ۸۰ نفر B ، ۵۰ نفر هر دو. فقط یکی؟ هیچ‌کدام؟

$$|A - B| = 120 - 50 = 70 \quad (۶)$$

$$|B - A| = 80 - 50 = 30 \quad (۷)$$

$$\text{فقط یکی} = 100 \quad (۸)$$

$$|A \cup B| = 150 \Rightarrow \text{هیچ‌کدام} = 50 \quad (۹)$$

مثال حل شده

مثال ۲: ۱۵۰ کارمند، ۹۰ انگلیسی، ۷۰ Excel، ۵۰ Python. اشتراکها و سه گانه. با اصل شمول-طرد:
 $|E \cup X \cup P| = 130$ ، هیچ کدام = ۲۰.

مثال حل شده

مثال ۳: از ۵ کارمند، تعداد تیمها $2^5 - 1 = 31$.

۶.۱ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

جمع ساده بدون کم کردن اشتراک / فراموش کردن U / اشتباه $\subseteq$ و $\in$ / فراموش کردن علامت + جمله سه گانه / فرض $A - B = B - A$.

۷.۱ خلاصه فصل

مفهوم	فرمول	کاربرد
اجتماع	$A \cup B$	اندازه بازار
اشتراک	$A \cap B$	مشتریان مشترک
تفاضل	$A - B$	هدف گیری مکمل
متمم	$A^c = U - A$	بازار بالقوه
تعداد زیرمجموعه	2^n	تشکیل تیم
شمول-طرد	$ A \cup B = A + B - A \cap B $	محاسبه تعداد

۸.۱ خودآزمایی

۱.۸.۱ چهارگزینه ای

- اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{3, 4\}$ ، کدام درست است؟ الف) $A \cap B = \{1, 2, 3, 4\}$ ب) $A \cup B = \{3\}$ ج) $A - B = \{1, 2\}$ د) $B \subseteq A$
- در شرکتی ۸۰ کارمند، ۵۰ Excel، ۳۰ Python، ۱۰ هر دو. چند نفر هیچ کدام؟ الف) ۱۰ ب) ۲۰ ج) ۳۰ د) ۴۰
- نماد عضویت: الف) $\subseteq$ ب) $\in$ ج) $\cup$ د) $\cap$
- $|A| = 40$ ، $|B| = 30$ ، $|A \cup B| = 60$ ، $|A \cap B|$ ؟ الف) ۱۰ ب) ۲۰ ج) ۳۰ د) ۷۰
- متمم A در U : الف) $A \cup U$ ب) $U - A$ ج) $A \cap U$ د) $A - U$
- تعداد زیرمجموعه های مجموعه ۵ عضوی: الف) ۵ ب) ۱۰ ج) ۲۵ د) ۳۲
- کدام درست است؟ الف) $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$ ب) $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$ ج) $(A \cup B)^c = (A \cap B)^c$ د) $A^c \cap B^c = (A - B)^c$
- $|A| = 3$ ، $|B| = 4$ ، $|A \times B|$ ؟ الف) ۷ ب) ۱۲ ج) ۳۴ د) ۴۳
- تفاضل متقارن: الف) $(A \cup B) - (A \cap B)$ ب) $(A \cap B) - (A \cup B)$ ج) $A \cup B$ د) $A \cap B$
- علامت $|A \cap B \cap C|$ در شمول-طرد سه گانه: الف) منفی ب) مثبت ج) بدون علامت د) بستگی دارد

۲.۸.۱ پاسخ چهارگزینه‌ای

۱- ج، ۲- الف، ۳- ب، ۴- الف، ۵- ب، ۶- د، ۷- ج، ۸- ب، ۹- الف، ۱۰- ب

۳.۸.۱ تشریحی

۱۱. از ۲۰۰ نفر، ۱۲۰ X، ۹۰ Y، ۴۰ هر دو. فقط یکی و هیچ کدام؟ ۱۲. ثابت کن $A - B = A \cap B^c$. ۱۳. از ۱۰۰ نفر، ۶۰ انگلیسی، ۵۰ فرانسه، ۳۰ هر دو. حداقل یکی؟ فقط انگلیسی؟

۹.۱ منابع

پورکاظمی (۱۳۹۸)، رنجبران (۱۳۹۹)، نیکوکار (۱۳۹۷).

ایست بازرسی

پایان فصل ۱.

۲ فصل ۲: رابطه و تابع (نسخه توسعه یافته)

۱.۲ چکیده

رابطه، پایه‌ای برای مفهوم تابع است — و تابع، قلب تپنده ریاضیات مدیریت. در این فصل، رابطه، انواع رابطه، دامنه، برد، توابع یک‌به‌یک، پوشا، معکوس، و ترکیب توابع را می‌آموزی.

۲.۲ اهداف یادگیری

- تعریف کند: زوج مرتب، رابطه، دامنه، برد، هم‌دامنه، تابع، یک‌به‌یک، پوشا، معکوس.
- تشخیص دهد: آیا یک رابطه تابع است؟ یک‌به‌یک است؟ معکوس پذیر است؟
- محاسبه کند: دامنه و برد، ترکیب توابع، تابع معکوس.
- تحلیل کند: آزمون خط عمودی و افقی، رفتار توابع.
- مدل‌سازی کند: یک مسئله مدیریتی را با تابع بیان کند.

۳.۲ مقدمه طنز

مدیر منابع انسانی می‌خواهد به هر کارمند دقیقاً یک حقوق بدهد. اگر به یک کارمند دو حقوق بدهد، حسابدار سخته می‌زند. اگر به دو کارمند یک حقوق بدهد، کارمندان شورش می‌کنند. این دقیقاً تعریف «تابع» است: به هر ورودی، دقیقاً یک خروجی.

۴.۲ مفاهیم اصلی

۱.۴.۲ مفهوم ۱: زوج مرتب و ضرب دکارتی

$$a = c \text{ و } b = d \iff (a, b) = (c, d). (1, 2) \neq (2, 1). |A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

۲.۴.۲ مفهوم ۲: رابطه و انواع آن

$$R \subseteq A \times B \text{ انواع:}$$

• بازتابی: $\forall a : (a, a) \in R$

• تقارنی: $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$

• تعدی: $(a, b), (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

• هم‌ارزی: هر سه با هم

۳.۴.۲ مفهوم ۳: دامنه، برد، هم‌دامنه

$$\text{Range}(f) \subseteq \text{Codomain}(f)$$

۴.۴.۲ مفهوم ۴: تابع

$f : A \rightarrow B$ و $\forall x \in A, \exists! y \in B : y = f(x)$. آزمون خط عمودی.

۵.۴.۲ مفهوم ۵: توابع یک‌به‌یک

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ آزمون خط افقی.}$$

۶.۴.۲ مفهوم ۶: توابع پوشا

$$\forall y \in B, \exists x \in A : f(x) = y$$

۷.۴.۲ مفهوم ۷: دوسویه و معکوس

تابع معکوس پذیر $\iff$ دوسویه.

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

$$\text{مثال: } Q(P) = 1000 - 20P \Rightarrow P = 50 - Q/20$$

۸.۴.۲ مفهوم ۸: ترکیب توابع

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \cdot (f \circ g) \neq (g \circ f)$$

۹.۴.۲ مفهوم ۹: توابع چندمتغیره

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

۱۰.۴.۲ مفهوم ۱۰: انواع تابع

۵.۲ مثال‌های حل شده

مثال حل شده

مثال ۱: $R_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ تابع است، $R_2 = \{(1, 2), (1, 3)\}$ تابع نیست.

نوع	فرمول	مثال
خطی	$ax + b$	هزینه ثابت + متغیر
درجه دوم	$ax^2 + bx + c$	سود کل
نمایی	a^x	رشد سرمایه
لگاریتمی	$\log_a x$	مطلوبیت
قدر مطلق	$ x $	فاصله از هدف
پله‌ای	$[x]$	تعرفه پله‌ای

مثال حل شده

مثال ۲: $f(x) = \sqrt{x-2}$ دامنه $[2, +\infty)$ ، برد $[0, +\infty)$.

مثال حل شده

مثال ۳: $Q(P) = 500 - 10P$ دامنه اقتصادی $[0, 50]$ ، برد $[0, 500]$.

مثال حل شده

مثال ۴: $R(q) = 20q$ ، $C(q) = 100 + 5q$ ، $P(q) = 15q - 100$ ، $P(20) = 200$.

مثال حل شده

مثال ۵: $f(x) = 2x + 1$ ، $g(x) = x^2$ ؛ $(f \circ g)(x) = 2x^2 + 1$ ، $(g \circ f)(x) = (2x + 1)^2$.

مثال حل شده

مثال ۶: تابع تولید $Q(L) = 10\sqrt{L}$ با ۲۵ کارگر: $Q = 50$.

مثال حل شده

مثال ۷: $f^{-1}(9) = 5$ ؛ $f(x) = 3x - 6 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+6}{3}$.

مثال حل شده

مثال ۸: $f(x) = x^2$ روی $[0, +\infty)$ یک به یک.

مثال حل شده

مثال ۹: هزینه پله‌ای: تا ۵۰ گیگ ۱۰۰ هزار؛ بعد هر گیگ ۳. $C(70) = 160$.

مثال حل شده

مثال ۱۰: $P(x, y) = 15x + 22y - 0.1xy - 100$ ؛ $P(10, 15) = 365$.

۶.۲ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

اشتباه دامنه/برد / فرض تابع بودن هر رابطه / فرض $(f \circ g) = (g \circ f)$ / فرض معکوس پذیری همه توابع / فراموش کردن شرط رادیکال و مخرج.

۷.۲ خلاصه فصل

مفهوم	تعریف
تابع	هر ورودی دقیقاً یک خروجی
یک به یک	$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
پوشا	Range = Codomain
دوسویه	یک به یک و پوشا
معکوس	$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$
ترکیب	$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

۸.۲ خودآزمایی

۱.۸.۲ چهارگزینه‌ای (۱۲ سوال)

- کدام تابع است؟ الف) $\{(1, 2), (1, 3)\}$ ب) $\{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$ ج) $\{(1, 2), (2, 3), (2, 4)\}$ د) $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$
- دامنه $f(x) = 1/(x-3)$ (الف: $\mathbb{R}$ ب) $\mathbb{R} - \{3\}$ ج) $[3, +\infty)$ د) $(-\infty, 3]$
- $f(x) = 3x - 2 \Rightarrow f(4) = ?$ (الف: ۱۰ ب) ۱۲ ج) ۱۴ د) ۱۶
- برد $f(x) = x^2 + 1$ (الف: $\mathbb{R}$ ب) $[0, +\infty)$ ج) $[1, +\infty)$ د) $(-\infty, 1]$
- $g(x) = 2x, f(x) = x + 1$. $(f \circ g)(3)$ ؟ (الف: ۶ ب) ۷ ج) ۸ د) ۹
- کدام یک به یک؟ الف) x^2 ب) $|x|$ ج) $2x + 1$ د) x^4
- معکوس $f(x) = 5x - 10$ (الف: $(x+10)/5$ ب) $(x-10)/5$ ج) $5x + 10$ د) $5/(x-10)$
- $|A| = 3, |B| = 4 \Rightarrow |A \times B| = ?$ (الف: ۷ ب) ۱۲ ج) ۳۴ د) ۴۳
- $f(x) = x^2$ روی $\mathbb{R}$ پوشا؟ (الف: بله ب) خیر ج) فقط مثبت د) فقط منفی
- کدام هم‌ارزی است؟ (الف: $<$ ب) $\leq$ ج) $=$ د) $\neq$
- دامنه $\sqrt{x}$: (الف: $\mathbb{R}$ ب) $[0, +\infty)$ ج) $(-\infty, 0]$ د) $(0, \infty)$
- $g(x) = x + 3, f(x) = 2x$. $(g \circ f)(2)$ ؟ (الف: ۵ ب) ۷ ج) ۹ د) ۱۱

۲.۸.۲ پاسخ

- ۱- ب، ۲- ب، ۳- الف، ۴- ج، ۵- ب، ۶- ج، ۷- الف، ۸- ب، ۹- ب، ۱۰- ج، ۱۱- ب، ۱۲- ب

ایست بازرسی

پایان فصل ۲.

۳ فصل ۳: توابع خطی و درجه دوم

۱.۳ چکیده

توابع خطی و درجه دوم، پرکاربردترین توابع در مدیریت هستند. هدف: حل مسائل نقطه سربه‌سر، حداکثر سود، و حداقل هزینه.

۲.۳ اهداف یادگیری

- تعریف کند: تابع خطی، شیب، تابع درجه دوم، سهمی، رأس.
- محاسبه کند: شیب، معادله خط، رأس، ریشه‌ها.
- حل کند: نقطه سربه‌سر، حداکثر سود، حداقل هزینه.

۳.۳ مقدمه طنز

تابع خطی مثل چاقوی آشپزخانه: ساده، همه‌کاره. تابع درجه دوم مثل چاقوی سرآشپز: تخصصی برای بهینه‌سازی.

۴.۳ مفاهیم اصلی

۱.۴.۳ مفهوم ۱: تابع خطی

$f(x) = ax + b$ ، شیب $a = \Delta y / \Delta x$. اشکال: شیب-عرض، نقطه-شیب، دو نقطه‌ای، استاندارد.

۲.۴.۳ مفهوم ۲: یافتن معادله خط

$y - y_1 = a(x - x_1)$.
مثال: $(1, 2)$ و $(3, 8)$: $a = 3$ ، $y = 3x - 1$.

۳.۴.۳ مفهوم ۳: تابع درجه دوم

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ، $a \neq 0$. رأس: $x_v = -b/(2a)$. ریشه‌ها: $x = (-b \pm \sqrt{\Delta})/(2a)$ ، $\Delta = b^2 - 4ac$.

۴.۴.۳ مفهوم ۴: نقطه سربه‌سر

$$R(q) = C(q)$$

۵.۴.۳ مفهوم ۵: بهینه‌سازی

$a > 0$ مینیم؛ $a < 0$ ماکسیم در x_v .

۵.۳ مثال‌های حل‌شده

مثال حل‌شده

مثال ۱: خط از $(2, 5)$ و $(4, 11)$: $y = 3x - 1$.

مثال حل شده

مثال ۲: هزینه ۵۰ واحد ۷۰۰، ۱۰۰ واحد ۱۲۰۰: $C = 10q + 200$.

مثال حل شده

مثال ۳: $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$: رأس $(2, -3)$.

مثال حل شده

مثال ۴: $C = 15q + 300$, $R = 30q$: سربه‌سر $q = 20$.

مثال حل شده

مثال ۵: $P(q) = -q^2 + 20q - 50$: حداکثر ۵۰ در $q = 10$.

مثال حل شده

مثال ۶: $C(q) = q^2 - 10q + 50$: حداقل ۲۵ در $q = 5$.

مثال حل شده

مثال ۷: $x^2 - 5x + 6 = 0$: ریشه‌ها ۲ و ۳.

مثال حل شده

مثال ۸: $R = 100P - 2P^2$, $Q = 100 - 2P$: حداکثر ۱۲۵۰ در $P = 25$.

۶.۳ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

علامت شیب / شرط $a \neq 0$ / فرمول رأس / جهت سهمی / علامت Δ .

۷.۳ خلاصه فصل

مفهوم	فرمول	کاربرد
تابع خطی	$ax + b$	هزینه، درآمد
رأس	$x_v = -b/(2a)$	بهینه
ریشه	$(-b \pm \sqrt{\Delta})/(2a)$	سربه‌سر
مبین	$\Delta = b^2 - 4ac$	تعداد ریشه

۸.۳ خودآزمایی

۱.۸.۳ چهارگزینه‌ای (۸ سوال)

۱. شیب خط از $(1, 3)$ و $(3, 7)$: الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴
۲. رأس $x^2 - 6x + 5$: الف) $(3, -4)$ ب) $(3, 4)$ ج) $(-3, -4)$ د) $(6, 5)$
۳. $a > 0$: الف) ماکسیمم ب) مینیمم ج) هیچ د) بستگی
۴. ریشه‌های $x^2 - 7x + 12$: الف) ۳ و ۴ ب) ۲ و ۶ ج) ۱ و ۱۲ د) ۵ و ۲
۵. سربه‌سر $R = 20q + 100$, $C = 10q + 100$: الف) ۵ ب) ۱۰ ج) ۱۵ د) ۲۰
۶. حداکثر $-x^2 + 4x + 1$: الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶
۷. $\Delta < 0$: الف) دو ریشه ب) یک ریشه ج) بدون ریشه حقیقی د) بی‌شمار
۸. $f(x) = 3x - 5$, $f(4)$: الف) ۵ ب) ۷ ج) ۹ د) ۱۱

۲.۸.۳ پاسخ

۱-ب، ۲-الف، ۳-ب، ۴-الف، ۵-ب، ۶-ج، ۷-ج، ۸-ب

ایست بازرسی

پایان فصل ۳.

۴ فصل ۴: توابع نمایی و لگاریتمی

۱.۴ چکیده

توابع نمایی و لگاریتمی، ستون فقرات مدل‌سازی مالی هستند. هدف: مدل‌سازی بهره مرکب، رشد جمعیت، استهلاک، ارزش فعلی.

۲.۴ اهداف یادگیری

- تعریف کند: تابع نمایی، پایه، لگاریتم، e , $\ln$.
- محاسبه کند: معادلات نمایی و لگاریتمی، بهره مرکب، ارزش فعلی.
- مدل‌سازی کند: بهره مرکب، رشد، استهلاک.

۳.۴ مقدمه طنز

اگر ۱۰۰ میلیون با نرخ ۲۰٪ به صورت پیوسته مرکب شود، بعد از ۱۰ سال $100 \times e^{2} \approx 738.9$ میلیون می‌شود. اما اگر بهره ساده حساب کنی: $100 \times (1 + 0.2 \times 10) = 300$ میلیون. این تفاوت، همان «معجزه نمایی» است.

۴.۴ مفاهیم اصلی

۱.۴.۴ مفهوم ۱: تابع نمایی

$a \neq 1, a > 0, f(x) = a^x$
جدول مقایسه:

x	۰	۱	۲	۳	۵	۱۰
$2x$	۰	۲	۴	۶	۱۰	۲۰
2^x	۱	۲	۴	۸	۳۲	۱۰۲۴

۲.۴.۴ مفهوم ۲: عددنبر

e^x ، $e \approx 2.71828$ پایه رشد پیوسته.

۳.۴.۴ مفهوم ۳: تابع لگاریتمی

$y = \log_a x \iff a^y = x$ دامنه: $(0, \infty)$ ، برد: $\mathbb{R}$. $\ln x = \log_e x$.

۴.۴.۴ مفهوم ۴: قوانین لگاریتم

$$\log(xy) = \log x + \log y \quad (۱۰)$$

$$\log(x/y) = \log x - \log y \quad (۱۱)$$

$$\log(x^n) = n \log x \quad (۱۲)$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad (۱۳)$$

۵.۴.۴ مفهوم ۵: معادلات نمایی

$$5^x = 20 \Rightarrow x = \log_5 20 \approx 1.862 \quad 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$$

۶.۴.۴ مفهوم ۶: معادلات لگاریتمی

$$\log_2 x + \log_2(x-2) = 3 \Rightarrow x(x-2) = 8 \Rightarrow x = 4$$

۷.۴.۴ مفهوم ۷: نامعادلات

$a > 1$: علامت تغییر نمی‌کند. $0 < a < 1$: علامت برعکس.

۸.۴.۴ مفهوم ۸: فرمول‌های مالی

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \quad (۱۴)$$

$$A = Pe^{rt} \quad (۱۵)$$

$$PV = \frac{FV}{(1+r)^t} \quad (۱۶)$$

$$EAR = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n - 1 \quad (۱۷)$$

۵.۴ مثال‌های حل شده

مثال حل شده

مثال ۱: $e^0 = 1, 2^{-3} = 0.125, 3^4 = 81$

مثال حل شده

مثال ۲: $2^{3x-1} = 32 \Rightarrow 3x - 1 = 5 \Rightarrow x = 2$

مثال حل شده

مثال ۳: $7^x = 50 \Rightarrow x = \ln 50 / \ln 7 \approx 2.01$

مثال حل شده

مثال ۴: $\log_3(2x + 1) = 4 \Rightarrow 2x + 1 = 81 \Rightarrow x = 40$

مثال حل شده

مثال ۵: $\log_2 16 + \log_2 4 - \log_2 8 = 4 + 2 - 3 = 3$

مثال حل شده

مثال ۶: ۱۰۰ میلیون ۱۵٪ سال: $100 \times (1.15)^5 \approx 201.14$

مثال حل شده

مثال ۷: ۵۰ میلیون ۱۲٪ ماهانه ۳ سال: $50 \times (1.01)^{36} \approx 71.54$

مثال حل شده

مثال ۸: ۲۰۰ میلیون ۸٪ پیوسته ۱۰ سال: $200e^{0.8} \approx 445.1$

مثال حل شده

مثال ۹: نرخ ۱۰٪: $t = \ln 2 / \ln 1.10 \approx 7.27$ سال

مثال حل شده

مثال ۱۰: PV برای ۱۰۰ میلیون در ۵ سال، نرخ ۱۲٪: ≈ 56.74

مثال حل شده

مثال ۱۱: استهلاک ۱۵٪، ۵۰۰ میلیون، ۴ سال: $500 \times (0.85)^4 \approx 261$

مثال حل شده

مثال ۱۲: رشد جمعیت ۲٪ از ۵۰۰,۰۰۰ در ۲۰ سال: $\approx 819,300$.

مثال حل شده

مثال ۱۳: EAR برای ۱۸٪ ماهانه: $(1.015)^{12} - 1 \approx 19.56\%$.

مثال حل شده

مثال ۱۴: $Q(50) \approx 882.4, Q(L) = 200 \ln L + 100$.

مثال حل شده

مثال ۱۵: $U(10) \approx 119.9, U(x) = 50 \ln(x + 1)$.

۶.۴ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

$e^{x+y} \neq e^x + e^y$ / فراموش کردن $x > 0$ / $(\log x)^2 \neq 2 \log x$ / $\log(x + y) \neq \log x + \log y$ / تغییر علامت با پایه < 1 / فراموش کردن تبدیل درصد.

۷.۴ خلاصه فصل

مفهوم	فرمول	کاربرد
نمایی	a^x	رشد، زوال
لگاریتمی	$\log_a x$	حل معادلات
بهره مرکب	$P(1 + r/n)^{nt}$	سرمایه گذاری
بهره پیوسته	Pe^{rt}	مالی پیشرفته
PV	$FV(1 + r)^{-t}$	تصمیم

۸.۴ خودآزمایی

۱.۸.۴ چهارگزینه ای (۱۵ سوال)

۱. 2^5 : الف) ۱۰ ب) ۲۵ ج) ۳۲ د) ۶۴
۲. $\log_3 81$: الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۹
۳. $\ln e^3$: الف) ۱ ب) ۳ ج) e د) e^3
۴. $\log_2(16 \times 8)$: الف) ۷ ب) ۸ ج) ۱۲ د) ۱۲۸
۵. $5^x = 125 \Rightarrow x$: الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵
۶. $\log_{10} 0.001$: الف) -۳ ب) -۲ ج) ۳ د) ۰.۰۱۰
۷. e^0 : الف) ۰ ب) ۱ ج) e د) تعریف نشده
۸. ۱۰۰ میلیون ۱٪ ۲ سال: الف) ۱۲۰ ب) ۱۲۱ ج) ۱۲۲ د) ۱۳۰

۹. $\log_2 x = -2 \Rightarrow x$ (الف) -4 (ب) 0.25 (ج) 4 (د) 0.5
 ۱۰. $0 < a < 1$: (الف) صعودی (ب) نزولی (ج) ثابت (د) متناوب
 ۱۱. $\log_a 1$: (الف) a (ب) ۱ (ج) ۰ (د) تعریف نشده
 ۱۲. دوبرابر ۸٪ (۷۲): (الف) ۸ (ب) ۹ (ج) ۱۰ (د) ۱۲
 ۱۳. $(1.05)^{10}$: (الف) ۵.۱ (ب) ۶۳.۱ (ج) ۸.۱ (د) ۲
 ۱۴. $\log_5 5^7$: (الف) ۱ (ب) ۵ (ج) ۷ (د) ۳۵
 ۱۵. رشد ۲٪ در ۳۵ سال: (الف) ۵.۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۴

۲.۸.۴ پاسخ

۱-ج، ۲-ب، ۳-ب، ۴-الف، ۵-ب، ۶-الف، ۷-ب، ۸-ب، ۹-ب، ۱۰-ب، ۱۱-ج، ۱۲-ب، ۱۳-ب، ۱۴-ج، ۱۵-ب

ایست بازرسی

پایان فصل ۴.

۵ فصل ۵: توابع خاص

۱.۵ چکیده

توابع زوج/فرد، معکوس، قدر مطلق، جزء صحیح، سقف، علامت، پله‌ای، یکنوا.

۲.۵ اهداف یادگیری

- تعریف کند: تابع زوج، فرد، معکوس، قدر مطلق، جزء صحیح، سقف، علامت، پله‌ای، یکنوا.
- تشخیص دهد: زوج/فرد بودن، معکوس پذیری، یکنوایی.
- مدل سازی کند: تعرفه پله‌ای، بسته بندی، انحراف از هدف.

۳.۵ مقدمه طنز

بسیاری از افراد فکر می کنند «تابع یعنی فرمول پیچیده با x و y ». توابع خاص مثل چاقوی جیبی چندکاره هستند: هر کدام برای یک کار خاص ساخته شده اند.

۴.۵ مفاهیم اصلی

۱.۴.۵ مفهوم ۱: تابع زوج

$f(-x) = f(x)$ — متقارن نسبت به محور y . مثال: $x^2, x^4, |x|, \cos x$.

۲.۴.۵ مفهوم ۲: تابع فرد

$f(-x) = -f(x)$ — متقارن نسبت به مبدأ. مثال: $x, \sin x, x^3, 1/x$. اگر $f(0)$ تعریف شده باشد، $f(0) = 0$.

۳.۴.۵ مفهوم ۳: نه زوج، نه فرد

مثل $x^2 + x$.

۴.۴.۵ مفهوم ۴: تابع معکوس

$x^2 \leftrightarrow \sqrt{x}$ ، $e^x \leftrightarrow \ln x$: معکوس‌های مهم: f برد f^{-1} دامنه $f(f^{-1}(x)) = x$

۵.۴.۵ مفهوم ۵: قدر مطلق

$|x| = x$ اگر $x \geq 0$ ، $-x$ اگر $x < 0$. خواص: $|xy| = |x||y|$ ، $|x+y| \leq |x| + |y|$ ، $\sqrt{x^2} = |x|$.

۶.۴.۵ مفهوم ۶: جزء صحیح

$[x] =$ بزرگ‌ترین صحیح $x \leq$. $[3.7] = 3$ ، $[-2.3] = -3$.

۷.۴.۵ مفهوم ۷: سقف

$\lceil x \rceil =$ کوچک‌ترین صحیح $x \geq$. $\lceil 3.2 \rceil = 4$ ، $\lceil -2.7 \rceil = -2$.

۸.۴.۵ مفهوم ۸: علامت

$\text{sgn}(x)$: $-1, 0, 1$.

۹.۴.۵ مفهوم ۹: پله‌ای

ثابت در بازه‌ها.

۱۰.۴.۵ مفهوم ۱۰: یکنوا

صعودی/نزولی. هر تابع اکیداً یکنوا یک‌به‌یک است.

۵.۵ مثال‌های حل شده

مثال حل شده

مثال ۱: $f(x) = x^4 + 3x^2$ زوج است.

مثال حل شده

مثال ۲: $f(x) = x^3 + x$ فرد است.

مثال حل شده

مثال ۳: $f(x) = x^3 + x^2$ نه زوج نه فرد.

مثال حل شده

مثال ۴: $f(x) = (2x + 3)/5 \Rightarrow f^{-1}(x) = (5x - 3)/2$.

مثال حل شده

مثال ۵: $|2x - 6| = 10 \Rightarrow x = 8$ یا $x = -2$.

مثال حل شده

مثال ۶: $|x - 4| \leq 6 \Rightarrow -2 \leq x \leq 10$.

مثال حل شده

مثال ۷: $\lceil 7.8 \rceil = 8$ ، $\lfloor -3.2 \rfloor = -4$.

مثال حل شده

مثال ۸: ۱۰۰ کالا، ۸ تایی: $\lceil 100/8 \rceil = 13$ بسته کامل.

مثال حل شده

مثال ۹: حمل: $\lceil 100/8 \rceil = 13$ کامیون.

مثال حل شده

مثال ۱۰: تعرفه پله‌ای: ۷۰ گیگ $= 240$ هزار.

مثال حل شده

مثال ۱۱: تحلیل روند با sgn .

مثال حل شده

مثال ۱۲: $f(x) = 3x + 5$ اکیداً صعودی.

مثال حل شده

مثال ۱۳: $f(-3) = 1/3$ ، $f(x) = 1/|x|$.

مثال حل شده

مثال ۱۴: $\lfloor x \rfloor = 3 \Rightarrow 3 \leq x < 4$.

مثال حل شده

مثال ۱۵: حقوق = پایه + پاداش.

مثال حل شده

مثال ۱۶: انحراف از هدف: $|480 - 500| = 20$.

مثال حل شده

مثال ۱۷: x^2 روی $[0, +\infty)$ معکوس $\sqrt{x}$.

مثال حل شده

مثال ۱۸: ۴۰ ساعت، ۵.۷ روزانه: $6 = \lceil 40/7.5 \rceil$ روز.

۶.۵ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

$-4 = \lceil -3.2 \rceil$ نه -3 / فراموش کردن دامنه در معکوس $|x| + |y| \neq |x + y|$ / اشتباه زوج و فرد / فرض یکنوایی همه توابع / فراموش کردن دامنه معکوس.

۷.۵ خلاصه فصل

تابع	تعریف	کاربرد
زوج	$f(-x) = f(x)$	تقارن محور y
فرد	$f(-x) = -f(x)$	تقارن مبدأ
معکوس	f^{-1}	از خروجی به ورودی
قدر مطلق	$ x $	فاصله
جزء صحیح	$\lfloor x \rfloor$	بسته‌بندی
سقف	$\lceil x \rceil$	حمل

۸.۵ خودآزمایی

۱.۸.۵ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)

۱. $x^2 + 1$ (الف: زوج ب: فرد ج: هیچ د: پله‌ای)
۲. x^3 (الف: زوج ب: فرد ج: هیچ د: ثابت)
۳. $\lfloor 4.9 \rfloor$ (الف: ۴ ب: ۵ ج: ۵.۴ د: ۰)
۴. $\lceil 4.1 \rceil$ (الف: ۴ ب: ۵ ج: ۵.۴ د: ۰)
۵. $|-7|$ (الف: -۷ ب: ۷ ج: ۰ د: ۱۴)
۶. $|x - 3| = 5$ (الف: $x = 8$ ب: $x = -2$ ج: هر دو د: هیچ‌کدام)
۷. $\lfloor -1.5 \rfloor$ (الف: -۱ ب: -۲ ج: ۱ د: ۲)
۸. معکوس $2x - 4$ (الف: $(x + 4)/2$ ب: $(x - 4)/2$ ج: $2x + 4$ د: $x/2 - 4$)
۹. f فرد، $f(2) = 5 \Rightarrow f(-2) = ?$ (الف: ۵ ب: -۵ ج: ۰ د: ۵.۲)
۱۰. $|x - 2| < 3$ (الف: $-1 < x < 5$ ب: $x > 5$ ج: $x < -1$ د: $x = 2$)
۱۱. $f = 5$ ثابت: (الف: زوج ب: فرد ج: هر دو د: هیچ)
۱۲. $\lceil 0.01 \rceil$ (الف: ۰ ب: ۱ ج: ۰.۰۱ د: -۱)
۱۳. اکیداً صعودی: (الف: $-x$ ب: x^2 ج: $2x + 1$ د: $1/x$)
۱۴. ۲۵ کالا، ۶ تایی، بسته کامل: (الف: ۳ ب: ۴ ج: ۵ د: ۶)
۱۵. ۲۵ کالا، ۶ تایی، کامیون: (الف: ۳ ب: ۴ ج: ۵ د: ۶)

۲۰۸.۵ پاسخ

۱- الف، ۲- ب، ۳- الف، ۴- ب، ۵- ب، ۶- ج، ۷- ب، ۸- الف، ۹- ب، ۱۰- الف، ۱۱- الف، ۱۲- ب، ۱۳- ج، ۱۴- ب، ۱۵- ج

ایست بازرسی

پایان فصل ۵.

۶ فصل ۶: اصول شمارش

۱.۶ چکیده

شمارش، هنر «شمردن بدون شمردن» است.

۲.۶ اهداف یادگیری

- تعریف کند: اصل ضرب، اصل جمع، جایگشت، جایگشت با تکرار، جایگشت دوری، فاکتوریل، اصل متمم.
- محاسبه کند: $n!$ ، $P(n, r)$.
- مدل سازی کند: رمزگذاری، چیدمان، تخصیص، برنامه ریزی شیفت.

۳.۶ مقدمه طنز

اگر بلد نباشی از اصول شمارش استفاده کنی، ممکن است ساده لوحانه بگویی «۵ راه» یا «۱۵ راه» — در حالی که پاسخ واقعی ۲۴۳ است!

۴.۶ مفاهیم اصلی

۱.۴.۶ مفهوم ۱: فاکتوریل

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1, 0! = 1, 5! = 120, 10! = 3628800$$

۲.۴.۶ مفهوم ۲: اصل ضرب

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$$

مثال: ۳ پیش غذا، ۵ اصلی، ۴ دسر: ۶۰ منو.

۳.۴.۶ مفهوم ۳: اصل جمع

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

مثال: ۳ خط اتوبوس + ۲ خط مترو = ۵ راه.

۴.۴.۶ مفهوم ۴: تفاوت ضرب و جمع

مراحل پشت سرهم [۴] ضرب. روش های موازی [۴] جمع.

۵.۴.۶ مفهوم ۵: جایگشت

$$P(n, r) = n! / (n - r)!$$

مثال: از ۸ نفر، ۳ جایگاه: $P(8, 3) = 336$.

۶.۴.۶ مفهوم ۶: جایگشت با تکرار

$$n! / (n_1! \times \dots \times n_k!)$$

مثال: BANANA: $6! / (3! \times 2!) = 60$.

۷.۴.۶ مفهوم ۷: جایگشت دوری

$$(n - 1)!$$

مثال: ۵ نفر دور میز: $4! = 24$.

۸.۴.۶ مفهوم ۸: اصل متمم

تعداد مطلوب = کل - نامطلوب.

۹.۴.۶ مفهوم ۹: ترکیب (پیش درآمد)

$$C(n, r) = n! / (r!(n - r)!)$$

۱۰.۴.۶ مفهوم ۱۰: قواعد تشخیص

سوال	پاسخ
ترتیب مهم است؟	بله: جایگشت؛ خیر: ترکیب
تکرار مجاز است؟	بله: توان یا جایگشت با تکرار
مراحل پشت سرهم؟	بله: اصل ضرب
روش های موازی؟	بله: اصل جمع
شمارش مستقیم سخت؟	بله: اصل متمم

۵.۶ مثال های حل شده

مثال حل شده

مثال ۱: ۴ قهوه، ۳ شیرینی، ۲ آبمیوه: ۲۴ سفارش.

مثال حل شده

مثال ۲: $۲ = ۴ + ۳ + ۲$ راه.

مثال حل شده

مثال ۳: $۱۹ = ۳ + ۴ + ۱۲$ برنامه.

مثال حل شده

مثال ۴: $8!/6! = 56$.

مثال حل شده

مثال ۵: $P(7, 3) = 210$.

مثال حل شده

مثال ۶: BANANA: ۶۰.

مثال حل شده

مثال ۷: ۸ نفر دور میز: ۵۰۴۰.

مثال حل شده

مثال ۸: رمز ۵ رقمی با حداقل یک زوج: ۹۶۸۷۵.

مثال حل شده

مثال ۹: ۶ پرستار، ۳ شیفت: ۹۰.

مثال حل شده

مثال ۱۰: کد تخفیف ۲ حرف + ۴ رقم: ۷۶.۶ میلیون.

مثال حل شده

مثال ۱۱: مسیر $(0, 0)$ به $(4, 3)$: ۳۵.

مثال حل شده

مثال ۱۲: ۵ کارمند، ۴ وظیفه: ۱۲۰.

مثال حل شده

مثال ۱۳: عدد ۴ رقمی، هزارگان ۷، یکان فرد: ۵۰۰.

مثال حل شده

مثال ۱۴: ۳ مدیر، ۲ کارشناس، ۱ کارآموز: ۶۰.

مثال حل شده

مثال ۱۵: ۱۲ دانشجو، تیم ۴ نفره با رئیس و منشی: ۵۹۴۰.

مثال حل شده

مثال ۱۶: از ۱۰ (آ، ع، خ)، تیم مختلط ۴ نفره: ۱۹۴.

مثال حل شده

مثال ۱۷: رمز ۴ رقمی با شروع فرد: ۱۶۸۰.

مثال حل شده

مثال ۱۸: ۴ زوج دور میز با شرط کنار هم: ۹۶.

۶.۶ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

اصل جمع در مسائل پشت سرهم / فراموش کردن تکرار ممنوع / فراموش کردن اهمیت ترتیب / ساده سازی فاکتوریل / تقسیم بر $n_i!$ / $(n-1)!$ در دوری / ناسازگاری اصل جمع.

۷.۶ خلاصه فصل

مفهوم	فرمول	کاربرد
فاکتوریل	$n!$	چیدمان کامل
اصل ضرب	$n_1 \times n_2 \times \dots$	پشت سرهم
اصل جمع	$n_1 + n_2 + \dots$	موازی
جایگشت	$n!/(n-r)!$	ترتیب مهم
جایگشت با تکرار	$n!/(n_1! \dots)$	اشیاء یکسان
جایگشت دوری	$(n-1)!$	دایره
اصل متمم	کل - نامطلوب	غیرمستقیم

۸.۶ خودآزمایی

۱.۸.۶ چهارگزینه ای (۱۵ سوال)

۱. ۵! (الف: ۲۵) (ب: ۶۰) (ج: ۱۲۰) (د: ۷۲۰)
۲. $P(6, 2)$: (الف: ۱۲) (ب: ۳۰) (ج: ۳۶) (د: ۷۲۰)
۳. ABAB: (الف: ۴) (ب: ۶) (ج: ۱۲) (د: ۲۴)
۴. ۵ نفر دور میز: (الف: ۵) (ب: ۲۴) (ج: ۱۲۰) (د: ۷۲۰)
۵. ۳ پیش غذا، ۴ اصلی، ۲ دسر: (الف: ۹) (ب: ۱۲) (ج: ۲۴) (د: ۳۶)
۶. از ۸ نفر، ۳ جایگاه: (الف: ۲۴) (ب: ۵۶) (ج: ۳۳۶) (د: ۴۰۳۲۰)
۷. رمز ۳ رقمی با تکرار: (الف: ۳۰) (ب: ۱۰۰) (ج: ۷۲۰) (د: ۱۰۰۰)
۸. عدد ۳ رقمی متمایز از ۱ تا ۵: (الف: ۱۰) (ب: ۲۰) (ج: ۶۰) (د: ۱۲۵)
۹. $10!/8!$: (الف: ۱۸) (ب: ۹۰) (ج: ۱۰۰) (د: ۷۲۰)

۱۰. MISS: الف) ۴ ب) ۱۲ ج) ۲۴ د) ۲۵۶
۱۱. ۴ زوج با شرط کنار هم: الف) ۴۸ ب) ۹۶ ج) ۱۹۲ د) ۳۸۴
۱۲. از ۱۰، تیم ۳ نفره: الف) ۳۰ ب) ۱۲۰ ج) ۷۲۰ د) ۱۰۰۰
۱۳. عدد ۴ رقمی با همه ارقام زوج: الف) ۴۰۰ ب) ۵۰۰ ج) ۶۲۵ د) ۱۰۰۰
۱۴. ۰! : الف) ۰ ب) ۱ ج) تعریف نشده د) ∞
۱۵. مسیر $(0, 0)$ به $(3, 2)$: الف) ۵ ب) ۱۰ ج) ۲۰ د) ۳۲

۲۰۸.۶ پاسخ

۱-ج، ۲-ب، ۳-ب، ۴-ب، ۵-ج، ۶-ج، ۷-د، ۸-ج، ۹-ب، ۱۰-ب، ۱۱-ب، ۱۲-ب، ۱۳-ب، ۱۴-ب، ۱۵-ب

ایست بازرسی

پایان فصل ۶.

۷ فصل ۷: آنالیز ترکیبی

۱.۷ چکیده

ترکیب، قضیه دوجمله‌ای، مثلث پاسکال، اتحادهای ترکیبیاتی.

۲.۷ اهداف یادگیری

- تعریف کند: ترکیب، ضریب دوجمله‌ای، مثلث پاسکال.
- محاسبه کند: $\binom{n}{r}$ ، بسط دوجمله‌ای.
- اثبات کند: اتحادهای ترکیبیاتی.

۳.۷ مقدمه طنز

اگر بلد نباشی از ترکیب استفاده کنی، ممکن است بگویی «۷۲۰ راه» در حالی که پاسخ ۱۲۰ است — چون تیم ۳ نفره، ترتیب مهم نیست.

۴.۷ مفاهیم اصلی

۱.۴.۷ مفهوم ۱: ترکیب

$$P(n, r) = r! \times \binom{n}{r} \quad \binom{n}{r} = n! / (r!(n-r)!)$$

۲.۴.۷ مفهوم ۲: خواص ترکیب

- تقارن: $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$
- پاسکال: $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$
- جمع ضرایب: $\sum \binom{n}{r} = 2^n$
- جمع متناوب: $\sum (-1)^r \binom{n}{r} = 0$

۳.۴.۷ مفهوم ۳: قضیه دوجمله‌ای

$(a+b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$. جمله عمومی: $T_{r+1} = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$. مثال: $(2x+3)^4$ ، ضریب x^2 : 216.

۴.۴.۷ مفهوم ۴: مثلث پاسکال

سطر n : ضرایب دوجمله‌ای. مجموع $= 2^n$.

۵.۴.۷ مفهوم ۵: اتحادهای مهم

• واندرموند: $\binom{m+n}{r} = \sum \binom{m}{k} \binom{n}{r-k}$

• جمع مربعات: $\sum \binom{n}{r}^2 = \binom{2n}{n}$

۶.۴.۷ مفهوم ۶: ترکیب با تکرار

$$\cdot \binom{n+r-1}{r}$$

۷.۴.۷ مفهوم ۷: کاربرد در احتمال

کل/مطلوب $= P(A)$.

۸.۴.۷ مفهوم ۸: تخصیص منابع

مثال: ۵ پروژه، ۳ تیم: $3^5 = 243$.

۵.۷ مثال‌های حل شده

مثال حل شده

مثال ۱: $\binom{8}{3} = 56$.

مثال حل شده

مثال ۲: $\binom{12}{4} = \binom{12}{8} = 495$.

مثال حل شده

مثال ۳: $\binom{7}{3} = \binom{6}{2} + \binom{6}{3} = 15 + 20 = 35$.

مثال حل شده

مثال ۴: $(x+2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$.

مثال حل شده

مثال ۵: $(3x-2)^6$ ، ضریب x^4 : 4860.

مثال حل شده

مثال ۶: از ۱۲، تیم ۵ نفره: ۷۹۲.

مثال حل شده

مثال ۷: از ۱۰ (۶، آ، خ)، تیم ۴ نفره با ۲ خانم: ۹۰.

مثال حل شده

مثال ۸: از ۱۵ (۴ معیوب)، ۵ تصادفی، احتمال ۲ معیوب: ≈ 0.33 .

مثال حل شده

مثال ۹: ۸ واحد بین ۳ دپارتمان: $\binom{10}{8} = 45$.

مثال حل شده

مثال ۱۰: تیم ۴ نفره با رئیس از ۱۰: ۸۴۰.

مثال حل شده

مثال ۱۱: سطر ۶ پاسکال: ۱، ۶، ۱۵، ۲۰، ۱۵، ۶، ۱.

مثال حل شده

مثال ۱۲: $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$.

مثال حل شده

مثال ۱۳: رمز ۸ کاراکتری (۵ حرف، ۳ رقم): $\approx 6.65 \times 10^{11}$.

مثال حل شده

مثال ۱۴: ۲۰ نفر، ۳ جایزه: $P(20, 3) = 6840$.

مثال حل شده

مثال ۱۵: کمیته ۵ نفره با رئیس و منشی: ۶۰۰۶۰.

مثال حل شده

مثال ۱۶: واندرموند برای $\binom{7}{3}$: ۳۵.

مثال حل شده

مثال ۱۷: ۲ نفر خاص حتماً باشند: $\binom{8}{2} = 28$.

مثال حل شده

مثال ۱۸: ۲ نفر خاص نباشند: $\binom{8}{4} = 70$.

مثال حل شده

مثال ۱۹: $(x + y + z)^3$.

مثال حل شده

مثال ۲۰: از ۱۰ (۳ معیوب)، ۴ تصادفی، احتمال حداقل ۱ معیوب: ≈ 0.833 .

۶.۷ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

استفاده جایگزشت به جای ترکیب / فراموش کردن $r!$ / ساده سازی فاکتوریل / شرط $0 \leq r \leq n$ / علامت در دوجمله ای / فراموش ضرب در مسائل چندمرحله ای / $\binom{n}{r}$ و $\binom{n+r-1}{r}$.

۷.۷ خلاصه فصل

مفهوم	فرمول	کاربرد
ترکیب	$\binom{n}{r}$	انتخاب بدون ترتیب
تقارن	$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$	ساده سازی
پاسکال	$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$	مثلث
دوجمله ای	$(a + b)^n$	بسط
ترکیب با تکرار	$\binom{n+r-1}{r}$	توزیع

۸.۷ خودآزمایی

۱.۸.۷ چهارگزینه ای (۱۵ سوال)

۱. $\binom{6}{2}$: الف (۱۲ ب) ۱۵ ج) ۳۰ د) ۳۶
۲. $\binom{10}{0}$: الف (۰ ب) ۱ ج) ۱۰ د) تعریف نشده
۳. $\binom{n}{1}$: الف (۱ ب) n ج) $n!$ د) n^2
۴. ضریب x^3 در $(x + 1)^5$: الف (۵ ب) ۱۰ ج) ۱۵ د) ۲۰
۵. سطر ۴ پاسکال: الف (۱، ۳، ۳، ۱ ب) ۱، ۴، ۶، ۴، ۱ ج) ۱، ۵، ۱۰، ۱۰، ۵، ۱ د) ۱، ۲، ۱
۶. $\binom{8}{3}$: الف (۲۴ ب) ۵۶ ج) ۳۳۶ د) ۴۰۳۲۰
۷. از ۷، تیم ۳ نفره: الف (۲۱ ب) ۳۵ ج) ۲۱۰ د) ۵۰۴۰

۸. $\sum_{r=0}^4 \binom{4}{r}$ (الف) ۸ (ب) ۱۶ (ج) ۳۲ (د) ۶۴
۹. ضریب x^2y^3 در $(x+y)^5$ (الف) ۵ (ب) ۱۰ (ج) ۱۵ (د) ۲۰
۱۰. $\binom{9}{7}$ (الف) $\binom{9}{2}$ (ب) $1 - \binom{9}{7}$ (ج) $\binom{9}{9}$ (د) $\binom{9}{0}$
۱۱. ترکیب با تکرار: ۴ شیء از ۳ نوع: (الف) ۱۵ (ب) ۲۰ (ج) ۳۵ (د) ۸۱
۱۲. $(1+1)^5$ (الف) ۵ (ب) ۱۰ (ج) ۳۲ (د) ۱۲۰
۱۳. $\binom{5}{2} + \binom{5}{3}$ (الف) ۱۰ (ب) ۱۵ (ج) ۲۰ (د) ۲۵
۱۴. $\binom{n}{2} = 15 \Rightarrow n$ (الف) ۵ (ب) ۶ (ج) ۷ (د) ۸
۱۵. زیرمجموعه ۳ عضوی از ۷: (الف) ۲۱ (ب) ۳۵ (ج) ۴۲ (د) ۲۱۰

۲.۸.۷ پاسخ

۱-ب، ۲-ب، ۳-ب، ۴-ب، ۵-ب، ۶-ب، ۷-ب، ۸-ب، ۹-ب، ۱۰-الف، ۱۱-الف، ۱۲-ج، ۱۳-ج، ۱۴-ب، ۱۵-ب

ایست بازرسی

پایان فصل ۷.

۸ فصل ۸: دستگاه مختصات و نمودار

۱.۸ چکیده

نمودار، زبان بصری ریاضیات است.

۲.۸ اهداف یادگیری

- تعریف کند: مختصات دکارتی، ربع‌ها، فاصله، نقطه میانی، شیب.
- رسم کند: توابع خطی، درجه دوم، نمایی، لگاریتمی.
- تحلیل کند: تبدیلات نموداری.

۳.۸ مقدمه طنز

بسیاری از افراد فکر می‌کنند «نمودار فقط یک شکل تزئینی است». اما در دنیای مدیریت، نمودار می‌تواند تفاوت بین یک تصمیم درست و یک فاجعه مالی باشد.

۴.۸ مفاهیم اصلی

۱.۴.۸ مفهوم ۱: مختصات دکارتی

محور x (افقی)، محور y (عمودی)، مبدأ $(0, 0)$. چهار ربع:

۲.۴.۸ مفهوم ۲: فاصله

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ربع	x	y	مثال
I	+	+	$(3, 4)$
II	-	+	$(-3, 4)$
III	-	-	$(-3, -4)$
IV	+	-	$(3, -4)$

۳.۴.۸ مفهوم ۳: نقطه میانی

$$.M = ((x_1 + x_2)/2, (y_1 + y_2)/2)$$

۴.۴.۸ مفهوم ۴: شیب

$$.m = \Delta y / \Delta x$$

۵.۴.۸ مفهوم ۵: معادله خط

$$y = mx + b, \text{ نقطه-شیب, دو نقطه‌ای, استاندارد.}$$

۶.۴.۸ مفهوم ۶: رسم توابع

خطی، درجه دوم، نمایی، لگاریتمی، قدر مطلق، پله‌ای.

۷.۴.۸ مفهوم ۷: تبدیلات

تبدیل	اثر
$f(x) + c$	انتقال عمودی بالا
$f(x - c)$	انتقال افقی راست
$-f(x)$	انعکاس محور x
$af(x)$	کشش عمودی

۸.۴.۸ مفهوم ۸: توابع با محدودیت

$$\text{قیمت و تقاضا } 0 \leq$$

۹.۴.۸ مفهوم ۹: چندناحیه‌ای

تعرفه پله‌ای.

۱۰.۴.۸ مفهوم ۱۰: تحلیل بصری

نقطه سربه‌سر، تعادل بازار، بهینه‌سازی.

۵.۸ مثال‌های حل شده

مثال حل شده

مثال ۱: فاصله $(2, 3)$ تا $(8, 11)$: ۱۰.

مثال حل شده

مثال ۲: وسط $(-2, 5)$ و $(6, -1)$: $(2, 2)$.

مثال حل شده

مثال ۳: شیب $(3, 7)$ تا $(7, 15)$: ۲.

مثال حل شده

مثال ۴: خط شیب -3 از $(1, 5)$: $y = -3x + 8$.

مثال حل شده

مثال ۵: $C = 20q + 100$.

مثال حل شده

مثال ۶: سربسر $q = 10$: $C = 15q + 150$, $R = 30q$.

مثال حل شده

مثال ۷: رأس $(x + 1)^2 - 2$: رأس $(-1, -2)$.

مثال حل شده

مثال ۸: $P(q) = -3q^2 + 60q - 100$: رأس $(10, 200)$.

مثال حل شده

مثال ۹: تعرفه پله‌ای: ۴۰ گیگ ۱۶۰ =.

مثال حل شده

مثال ۱۰: تقاطع $y = 2x + 1$ و $y = -x + 7$: $(2, 5)$.

مثال حل شده

مثال ۱۱: $f(t) = 100e^{0.1t}$: $f(10) \approx 271.8$.

مثال حل شده

مثال ۱۲: $U(x) = 50 \ln(x+1)$: $U(10) \approx 119.9$.

مثال حل شده

مثال ۱۳: $|x-3|$: رأس $(3, 0)$.

مثال حل شده

مثال ۱۴: $C = 20q + 50$, $R = 40q - q^2$: رأس $(10, 50)$.

مثال حل شده

مثال ۱۵: $C(q) = q^2 - 20q + 200$: حداقل ۱۰۰ در $q = 10$.

مثال حل شده

مثال ۱۶: تعادل: $Q_d = 100 - 2P$, $Q_s = 3P - 20$: $(24, 52)$.

مثال حل شده

مثال ۱۷: $C_1 = 50q + 1000$, $C_2 = 30q + 3000$: برای $q > 100$, C_2 بهتر.

مثال حل شده

مثال ۱۸: $\lfloor x \rfloor$: $f(1.5) = 1$.

مثال حل شده

مثال ۱۹: x^3 فرد، x^2 زوج.

مثال حل شده

مثال ۲۰: حقوق $S(x)$: $S(150) = 6$.

۶.۸ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

علامت ربع‌ها / فراموش جذر / ترتیب تفریق شیب / شرط دامنه / جهت انتقال افقی / مجانب‌ها / تشخیص نوع تابع.

مفهوم	فرمول	کاربرد
فاصله	$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$	انبارها
نقطه میانی	$((x_1 + x_2)/2, (y_1 + y_2)/2)$	مکان بهینه
شیب	$\Delta y / \Delta x$	نرخ تغییر
رأس	$-b/(2a)$	بهینه
تعادل	$Q_d = Q_s$	قیمت

۷.۸ خلاصه فصل

۸.۸ خودآزمایی

۱.۸.۸ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)

۱. فاصله $(0, 0)$ تا $(3, 4)$: الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۷
۲. $(3, -2)$: الف) I ب) II ج) III د) IV
۳. شیب $(1, 2)$ تا $(4, 8)$: الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۶
۴. وسط $(2, 6)$ و $(8, 4)$: الف) $(5, 5)$ ب) $(10, 10)$ ج) $(6, 4)$ د) $(3, 2)$
۵. $x^2 - 4$ در $x = 3$: الف) ۵ ب) ۹ ج) ۳ د) ۰
۶. رأس $x^2 - 6x + 5$: الف) $(3, -4)$ ب) $(3, 4)$ ج) $(-3, -4)$ د) $(6, 5)$
۷. $f(x - 3)$: الف) انتقال راست ب) چپ ج) بالا د) انعکاس
۸. تقاطع $y = 2x + 3$ و $y = -x + 9$: الف) $(2, 7)$ ب) $(3, 6)$ ج) $(4, 5)$ د) $(1, 9)$
۹. شیب منفی تقاضا: الف) افزایش قیمت = افزایش تقاضا ب) افزایش قیمت = کاهش تقاضا ج) ثابت د) تعریف نشده
۱۰. متقارن مبدأ: الف) x^2 ب) x^3 ج) $|x|$ د) e^x
۱۱. $|x|$: الف) خط ب) سهمی ج) V د) U
۱۲. 2^{-1} : الف) -2 ب) 0.5 ج) ۱ د) ۲
۱۳. مجانب e^x چپ: الف) $y = 1$ ب) $y = 0$ ج) $y = -1$ د) ندارد
۱۴. سربه‌سر $C = 10q + 200$, $R = 20q$: الف) ۱۰ ب) ۱۵ ج) ۲۰ د) ۳۰
۱۵. برای $q > 100$, $C_2 = 3q + 1500$, $C_1 = 5q + 1000$: الف) C_1 ب) C_2 ج) برابر د) بستگی

۲.۸.۸ پاسخ

- ۱- ج، ۲- د، ۳- ب، ۴- الف، ۵- الف، ۶- الف، ۷- الف، ۸- الف، ۹- ب، ۱۰- ب، ۱۱- ج، ۱۲- ب، ۱۳- ب، ۱۴- ج، ۱۵- ب

ایست بازرسی

پایان فصل ۸.

۹ فصل ۹: کاربردهای شمارش در مدیریت

۱.۹ چکیده

ترکیب اصول شمارش و احتمال برای تصمیم‌گیری مدیریتی.

۲.۹ اهداف یادگیری

- تعریف کند: فضای نمونه، پیشامد، احتمال شرطی، امید ریاضی.
- محاسبه کند: احتمال، امید ریاضی، ارزش مورد انتظار تصمیم.
- تحلیل کند: درخت تصمیم، قضیه بیز.
- مدل سازی کند: کنترل کیفیت، موجودی، سبد، بخش بندی مشتریان.

۳.۹ مقدمه طنز

هر تصمیم مدیریتی یک «شرط بندی» است — روی موفقیت محصول، بازده سرمایه گذاری، تقاضای بازار.

۴.۹ مفاهیم اصلی

۱.۴.۹ مفهوم ۱: فضای نمونه و پیشامد

$$S = \text{همه نتایج}, A \subseteq S.$$

۲.۴.۹ مفهوم ۲: احتمال کلاسیک

$$P(A) = |A|/|S|, 0 \leq P(A) \leq 1, P(S) = 1, P(A^c) = 1 - P(A).$$

۳.۴.۹ مفهوم ۳: احتمال با ترکیب

$$P = \text{کل/مطلوب}.$$

۴.۴.۹ مفهوم ۴: احتمال شرطی

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B).$$

۵.۴.۹ مفهوم ۵: استقلال

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

۶.۴.۹ مفهوم ۶: قانون احتمال کل

$$P(A) = \sum P(A|B_i)P(B_i).$$

۷.۴.۹ مفهوم ۷: بیز

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}.$$

۸.۴.۹ مفهوم ۸: امید ریاضی

$$E[X] = \sum x_i P(x_i).$$

۹.۴.۹ مفهوم ۹: ارزش مورد انتظار

$$E[\text{تصمیم}] = \sum (P \times \text{سود}).$$

۱۰.۴.۹ مفهوم ۱۰: درخت تصمیم

مربع = تصمیم، دایره = رویداد، مثلث = پیامد.

۵.۹ مثال‌های حل شده

مثال حل شده

مثال ۱: ۵ قرمز، ۳ آبی: $P = 5/8$.

مثال حل شده

مثال ۲: از ۸ (۵م، ۳ز)، ۳ مرد: $P = 10/56$.

مثال حل شده

مثال ۳: شرطی: $P(E|F) = 0.625$.

مثال حل شده

مثال ۴: مستقل: $P(A \cup B) = 0.7$.

مثال حل شده

مثال ۵: امید: $E = 26$.

مثال حل شده

مثال ۶: درخت تصمیم: معرفی $(20 < 30)$.

مثال حل شده

مثال ۷: بیز: $P(L_1|D) = 0.5$.

مثال حل شده

مثال ۸: کنترل کیفیت: $P \approx 0.17$.

مثال حل شده

مثال ۹: موجودی: $E = -21$.

مثال حل شده

مثال ۱۰: سبد: ۲۰ و ۱۰.

مثال حل شده

مثال ۱۱: مشتریان: $P \approx 0.37$.

مثال حل شده

مثال ۱۲: شیف: ۴۵ راه.

مثال حل شده

مثال ۱۳: احتمال کل: ۱٪.

مثال حل شده

مثال ۱۴: تصمیم: C بهترین.

مثال حل شده

مثال ۱۵: مرکب: $P = 0.44$.

مثال حل شده

مثال ۱۶: کیفیت: $P \approx 0.9477$.

مثال حل شده

مثال ۱۷: چند مرحله‌ای: تحقیق (۱۱۵ < ۷۵).

مثال حل شده

مثال ۱۸: تأمین کننده: A و B برابر.

مثال حل شده

مثال ۱۹: جایگشت: ۴۰.

مثال حل شده

مثال ۲۰: بازگشتی: ادامه تولید (۲).

۶.۹ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

$\cap$ و U / فرض استقلال بدون بررسی / بیز (جابجایی صورت/مخرج) / فراموش متهم در «حداقل» / امید
(جمع به جای ضرب) / فراموش هزینه / خطای محاسبه $\binom{n}{r}$.

۷.۹ خلاصه فصل

مفهوم	فرمول	کاربرد
کلاسیک	$ A / S $	احتمال
شرطی	$P(A \cap B)/P(B)$	اطلاعات
استقلال	$P(A)P(B)$	مستقل
احتمال کل	$\sum P(A B_i)P(B_i)$	افراز
بیز	$P(A B_i)P(B_i)/P(A)$	به روز رسانی
امید	$\sum x_i P(x_i)$	میانگین

۸.۹ خودآزمایی

۱.۸.۹ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)

۱. تاس < 4 : الف (ب $1/6$) ج $1/3$ (د $2/3$)
۲. زن از ۵ م 3 : الف (ب $3/8$) ج $5/8$ (د $5/3$)
۳. $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.5$ مستقل، $P(A \cap B)$: الف (ب 1.0) ج 2.0 (د 4.0)
۴. $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$, $P(A \cap B) = 0.1$: الف (ب 1.0) ج 25.0 (د 3.0)
۵. امید تاس: الف (ب 3) ج 5.3 (د 4)
۶. $A(50\%, 2\%)$: $B(50\%, 4\%)$: الف (ب 2%) ج 3% (د 4%)
۷. از سوال ۶، $P(A|D)$: الف (ب $1/3$) ج $1/2$ (د $2/3$)
۸. از ۱۰، تیم ۴ نفره: الف (ب 210) ج 5040 (د 10000)
۹. ۳ نفر خاص همیشه باشند: الف (ب 7) ج 10 (د 21)
۱۰. سود ۱۰۰، (3.0) ، (7.0) : الف (ب $-$) ج 5 (د 15)
۱۱. حداقل ۱ موفقیت با ۲، ۳ بار: الف (ب 488.0) ج 512.0 (د 6.0)
۱۲. نقص 5% ، ۲ تای: الف (ب 9.0) ج 9025.0 (د 95.0)
۱۳. $E[A] = 50$, $E[B] = 30$: الف (ب A) ج B (د برابر)
۱۴. از ۷، رئیس و ۲ عضو: الف (ب 21) ج 105 (د 210)
۱۵. زن از ۳ م: الف (ب $3/28$) ج $5/28$ (د $10/28$)

۲.۸.۹ پاسخ

- ۱- ب، ۲- الف، ۳- ب، ۴- ب، ۵- ب، ۶- ب، ۷- الف، ۸- الف، ۹- الف، ۱۰- الف، ۱۱- الف، ۱۲- ب، ۱۳- الف، ۱۴- ب، ۱۵- د

ایست بازرسی

پایان فصل ۹.

۱۰ فصل ۱۰: حد و خواص آن

۱.۱۰ چکیده

حد، پل بین جبر و حساب دیفرانسیل.

۲.۱۰ اهداف یادگیری

- تعریف کند: حد، حد چپ، حد راست، حد در بی نهایت، فرم مبهم.
- محاسبه کند: حد چندجمله‌ای، گنگ، مثلثاتی، نمایی، لگاریتمی.
- تحلیل کند: فرم‌های مبهم، حد در بی نهایت.
- مدل‌سازی کند: رفتار بلندمدت هزینه، تقاضا، سود.

۳.۱۰ مقدمه طنز

حد مثل دوربین تله‌زوم است: به جای اینکه در نقطه دقیق بایستی، از فاصله نگاه می‌کنی.

۴.۱۰ مفاهیم اصلی

۱.۴.۱۰ مفهوم ۱: شهود حد

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$: وقتی x به a نزدیک می‌شود، $f(x)$ به L نزدیک.
مثال: $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1)/(x - 1) = 2$.

۲.۴.۱۰ مفهوم ۲: حد چپ و راست

$$\lim_{x \rightarrow a^-} = \lim_{x \rightarrow a^+} = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} = L$$

۳.۴.۱۰ مفهوم ۳: تعریف اپسیلون-دلته

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

۴.۴.۱۰ مفهوم ۴: قوانین حد

قانون	فرمول
حد ثابت	$\lim c = c$
حد همانی	$\lim x = a$
حد جمع	$\lim(f + g) = \lim f + \lim g$
حد ضرب	$\lim(f \cdot g) = \lim f \cdot \lim g$
حد تقسیم	$\lim(f/g) = \lim f / \lim g$
حد توان	$\lim f^n = (\lim f)^n$

۵.۴.۱۰ مفهوم ۵: چندجمله‌ای

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$$

۶.۴.۱۰ مفهوم ۶: کسری و گنگ

تجزیه، مزدوج، فاکتورگیری.

$$\text{مثال: } \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+4} - 2)/x = 1/4$$

۷.۴.۱۰ مفهوم ۷: مثلثاتی

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x / x = 1$$

۸.۴.۱۰ مفهوم ۸: نمایی و لگاریتمی

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)/x = 1, \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x = 1$$

۹.۴.۱۰ مفهوم ۹: حد دربی نهایت

تقسیم بر بالاترین توان.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + \dots}{b_m x^m + \dots} = \begin{cases} 0 & n < m \\ a_n/b_m & n = m \\ \infty & n > m \end{cases}$$

۱۰.۴.۱۰ مفهوم ۱۰: فرم‌های مبهم

$$\infty^0, 1^\infty, 0^0, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, \infty/\infty, 0/0$$

۱۱.۴.۱۰ مفهوم ۱۱: قضیه فشردگی

$$\lim g = \lim h = L \Rightarrow \lim f = L, g \leq f \leq h$$

۱۲.۴.۱۰ مفهوم ۱۲: مجانب

$$\lim_{x \rightarrow \infty} = L \text{ افقی: } \lim = \pm \infty \text{ عمودی:}$$

۵.۱۰ مثال‌های حل شده

مثال حل شده

$$\text{مثال ۱: } \lim_{x \rightarrow 3} (2x^3 - 5x + 1) = 40$$

مثال حل شده

$$\text{مثال ۲: } \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4)/(x - 2) = 4$$

مثال حل شده

$$\text{مثال ۳: } \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} - 1)/x = 1/2$$

مثال حل شده

$$\text{مثال ۴: } \lim_{x \rightarrow 0} \sin 5x/(2x) = 5/2$$

مثال حل شده

$$\text{مثال ۵: } \lim_{x \rightarrow 0} (e^{3x} - 1)/x = 3$$

مثال حل شده

مثال ۶: $\lim_{x \rightarrow \infty} (4x^2 + 3x - 1)/(2x^2 - x + 5) = 2$

مثال حل شده

مثال ۷: $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x + 1)/(x^2 + 5) = 0$

مثال حل شده

مثال ۸: $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + 1)/(x^2 + 1) = \infty$

مثال حل شده

مثال ۹: $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 3/x)^x = e^3$

مثال حل شده

مثال ۱۰: $f(x) = x^2$ برای $x < 2$ ، $3x - 2$ برای $x \geq 2$: حد = ۴.

مثال حل شده

مثال ۱۱: $|x|/x$ در ۰: حد ندارد.

مثال حل شده

مثال ۱۲: $AC(q) = (2000 + 10q)/q$: حد = ۱۰.

مثال حل شده

مثال ۱۳: $Q = 5000/(P + 10)$: حد در $P \rightarrow \infty$ = ۰.

مثال حل شده

مثال ۱۴: $P(q) = -3q^2 + 100q - 200$: حد = $-\infty$.

مثال حل شده

مثال ۱۵: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = 1/2$

مثال حل شده

مثال ۱۶: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 2x / \sin 3x = 2/3$

مثال حل شده

مثال ۱۷: $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + 2x)/x = 2$

مثال حل شده

مثال ۱۸: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$

مثال حل شده

مثال ۱۹: $\lim_{x \rightarrow 3} |x - 3|/(x - 3)$ ندارد.

مثال حل شده

مثال ۲۰: $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 1)/(x^2 - 1) = 3/2$

۶.۱۰ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

جای گذاری در فرم مبهم / حد $\neq$ مقدار تابع / تقسیم بر بالاترین توان / فراموش حد چپ/راست / علامت $\infty - \infty$ / $\lim f/g$ وقتی $\lim g = 0$ با $\sin x/x$ ضرایب / فرم های مبهم خاص.

۷.۱۰ خلاصه فصل

مفهوم	فرمول	کاربرد
چند جمله ای	$P(a)$	جای گذاری
مثلثاتی	$\sin x/x \rightarrow 1$	مثلثات
نمایی	$(e^x - 1)/x \rightarrow 1$	مالی
بی نهایت	تقسیم بر بالاترین توان	بلندمدت
1^∞	$\rightarrow e$	بهره پیوسته

۸.۱۰ خودآزمایی

۱.۸.۱۰ چهارگزینه ای (۱۵ سوال)

۱. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1)$: الف) ۵ (ب) ۶ (ج) ۷ (د) ۸
۲. $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9)/(x - 3)$: الف) ۰ (ب) ۳ (ج) ۶ (د) ندارد
۳. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 4x/x$: الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۴ (د) ∞
۴. $\lim_{x \rightarrow \infty} (5x^2 + 1)/(2x^2 - 3)$: الف) ۰ (ب) ۵/۲ (ج) ۲/۵ (د) ∞
۵. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} - 1)/x$: الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) e
۶. $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x + 1)/(x^2 + 1)$: الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۳ (د) ∞
۷. $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x + 5}$: الف) ۲ (ب) ۳ (ج) ۴ (د) ۹
۸. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1 + x} - 1)/x$: الف) ۰ (ب) ۱/۲ (ج) ۱ (د) ∞
۹. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 2/x)^x$: الف) ۱ (ب) ۲ (ج) e (د) e^2
۱۰. $|x|/x$ در ۰: الف) حد ۱ (ب) -۱ (ج) ۰ (د) ندارد
۱۱. $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 + 1)/(x^2 + 5)$: الف) ۰ (ب) ۲ (ج) ∞ (د) $-\infty$
۱۲. $f = (3x + 1)/(x - 2)$: الف) $y = 0$ (ب) $y = 1$ (ج) $y = 3$ (د) $x = 2$

۱۳. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)/x$: الف) ۰ ب) ۱ ج) e د) ∞
 ۱۴. $\lim_{x \rightarrow 0} \tan x/x$: الف) ۰ ب) ۱ ج) ∞ د) ندارد
 ۱۵. $AC(q) = 500/q + 10$: الف) ۰ ب) ۵ ج) ۱۰ د) ∞

پاسخ ۲.۸.۱۰

۱-ج، ۲-ج، ۳-ج، ۴-ب، ۵-ج، ۶-الف، ۷-ب، ۸-ب، ۹-د، ۱۰-د، ۱۱-ج، ۱۲-ج، ۱۳-ب، ۱۴-ب، ۱۵-ج

ایست بازرسی

پایان فصل ۱۰.

۱۱ فصل ۱۱: حد چپ و راست

۱.۱۱ چکیده

حد چپ و راست، رفتار توابع در نزدیکی نقاط بحرانی.

۲.۱۱ اهداف یادگیری

- تعریف کند: حد چپ، حد راست، پرش.
- محاسبه کند: حد چپ/راست توابع قطعه‌ای.
- تحلیل کند: وجود یا عدم وجود حد.
- مدل‌سازی کند: توابع تعرفه‌ای، حقوق پله‌ای.

۳.۱۱ مقدمه طنز

اگر پاداش در نقطه ۱۰۰ یک‌بار ۱ میلیون بپردازد، کارمندی که ۹.۹۹ فروخته حس بدی می‌گیرد.

۴.۱۱ مفاهیم اصلی

۱.۴.۱۱ مفهوم ۱: حد چپ

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$$

۲.۴.۱۱ مفهوم ۲: حد راست

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$$

۳.۴.۱۱ مفهوم ۳: شرط وجود حد

$$\lim^- = \lim^+ \Rightarrow \text{حد وجود دارد.}$$

۴.۴.۱۱ مفهوم ۴: توابع پله‌ای

در نقاط مرزی، پرش.

۵.۴.۱۱ مفهوم ۵: قدر مطلق

$|x|/x$: حد چپ -1 ، حد راست $+1$.

۶.۴.۱۱ مفهوم ۶: جزء صحیح

$$\lim_{x \rightarrow n^+} [x] = n, \lim_{x \rightarrow n^-} [x] = n - 1$$

۷.۴.۱۱ مفهوم ۷: سقف

$$\lim_{x \rightarrow n^+} \lceil x \rceil = n + 1, \lim_{x \rightarrow n^-} \lceil x \rceil = n$$

۸.۴.۱۱ مفهوم ۸: تعرفه‌ای

پیوسته یا ناپیوسته.

۹.۴.۱۱ مفهوم ۹: قطعه‌ای

حد چپ/راست جدا.

۱۰.۴.۱۱ مفهوم ۱۰: پرش

$$|\lim^+ - \lim^-|$$

۵.۱۱ مثال‌های حل شده

مثال حل شده

مثال ۱: $f(x) = 2$ برای $x < 3$ ، 5 برای $x \geq 3$: پرش ۳.

مثال حل شده

مثال ۲: $|x|/x$: چپ -1 ، راست $+1$.

مثال حل شده

مثال ۳: $f(x) = x^2$ برای $x < 2$ ، $3x - 2$ برای $x \geq 2$: حد $= 4$.

مثال حل شده

مثال ۴: $[x]$ در ۳: چپ ۲، راست ۳.

مثال حل شده

مثال ۵: $\lceil x \rceil$ در ۴: چپ ۴، راست ۵.

مثال حل شده

مثال ۶: تعرفه پیوسته در ۵۰.

مثال حل شده

مثال ۷: تعرفه ناپیوسته: پرش ۲۰.

مثال حل شده

مثال ۸: پاداش پیوسته در ۱۰۰.

مثال حل شده

مثال ۹: $|x - 2|/(x - 2)$ در ۲: ندارد.

مثال حل شده

مثال ۱۰: $e^{1/x}$: چپ ۰، راست $+\infty$.

مثال حل شده

مثال ۱۱: $k: 2k + 1 = 4 \Rightarrow k = 1.5$.

مثال حل شده

مثال ۱۲: مالیات پله‌ای پیوسته.

مثال حل شده

مثال ۱۳: sgn در ۰: ندارد.

مثال حل شده

مثال ۱۴: $\sin(1/x)$: ندارد (نوسانی).

مثال حل شده

مثال ۱۵: $f(x) = 2x + 1$ برای $x < 1$ ، $x^2 + 2$ برای $x \geq 1$: حد = ۳.

مثال حل شده

مثال ۱۶: تخفیف پله‌ای: پرش ۵.

مثال حل شده

مثال ۱۷: $1/(1 + e^{1/x})$: چپ ۱، راست ۰.

مثال حل شده

مثال ۱۸: $\lceil x/10 \rceil$ در ۵۰: پرش ۱.

مثال حل شده

مثال ۱۹: تابع سه ضابطه‌ای: حد ندارد.

مثال حل شده

مثال ۲۰: تحلیل پرش: ۱۰.

۶.۱۱ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

فرض وجود حد بدون بررسی دو طرف / علامت $x \rightarrow a^-$ / جزء صحیح اعداد منفی / $|x|/x$ / دامنه رادیکال / تشخیص ناپیوستگی / فرض پیوستگی تعریفه.

۷.۱۱ خلاصه فصل

مفهوم	فرمول	کاربرد
حد چپ	$\lim^-$	رفتار چپ
حد راست	$\lim^+$	رفتار راست
شرط وجود	$\lim^- = \lim^+$	پیوستگی
پرش	$ \lim^+ - \lim^- $	ناپیوستگی
جزء صحیح	$[x]$	بسته بندی
سقف	$\lceil x \rceil$	حمل

۸.۱۱ خودآزمایی

۱.۸.۱۱ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)

۱. $\lim_{x \rightarrow 2^-}$: الف) چپ (ب) راست (ج) بالا (د) پایین
۲. $f = 1$ برای $x < 0$ ، $x \geq 0$ حد چپ در ۰: الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ندارد
۳. حد راست: الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ندارد
۴. حد کل: الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ندارد
۵. $\lim_{x \rightarrow 0^-} |x|/x$: الف) -1 (ب) ۰ (ج) ۱ (د) ندارد
۶. $\lim_{x \rightarrow 3^-} [x]$: الف) ۲ (ب) ۳ (ج) ۴ (د) ندارد
۷. $\lim_{x \rightarrow 3^+} [x]$: الف) ۳ (ب) ۴ (ج) ۵ (د) ندارد
۸. $f(x) = x^2$ برای $x < 1$ ، $2x - 1$ برای $x \geq 1$: الف) حد ۱ (ب) ۲ (ج) ندارد (د) ۰
۹. پرش $f = 3$ / $f = 5$: الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۵
۱۰. $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x}$: الف) ۰ (ب) ۱ (ج) $+\infty$ (د) $-\infty$
۱۱. $kx + 1$ / $x^2 + 2$: الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۴
۱۲. sgn در ۰: الف) ۱ (ب) -1 (ج) ۰ (د) ندارد
۱۳. $\lim_{x \rightarrow 5^-} [x/2]$: الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۴
۱۴. مالیات پیوسته در ۵۰: الف) پیوسته (ب) پرش ۵ (ج) پرش ۱۰ (د) پرش ۲۰
۱۵. کدام پرش دارد؟ الف) x^2 (ب) $[x]$ (ج) $\sin x$ (د) e^x

۲.۸.۱۱ پاسخ

۱- الف، ۲- ب، ۳- ج، ۴- د، ۵- الف، ۶- الف، ۷- ب، ۸- الف، ۹- ب، ۱۰- ج، ۱۱- ب، ۱۲- د، ۱۳- ب، ۱۴- الف، ۱۵- ب

ایست بازرسی

پایان فصل ۱۱.

۱۲ فصل ۱۲: پیوستگی

۱.۱۲ چکیده

پیوستگی، مفهوم «بدون پرش بودن».

۲.۱۲ اهداف یادگیری

- تعریف کند: پیوستگی، انواع ناپیوستگی.
- تشخیص دهد: آیا تابع پیوسته است؟
- به کار برد: EVT، IVT.
- مدل سازی کند: توابع تعرفه ای.

۳.۱۲ مقدمه طنز

پیوستگی مثل جاده بدون دست انداز است.

۴.۱۲ مفاهیم اصلی

۱.۴.۱۲ مفهوم ۱: پیوستگی در نقطه

۱. $f(a)$ تعریف شده.

۲. $\lim_{x \rightarrow a}$ وجود دارد.

۳. $\lim = f(a)$.

۲.۴.۱۲ مفهوم ۲: پیوستگی چپ و راست

$\lim^+ = f(a)$ (راست)، $\lim^- = f(a)$ (چپ).

۳.۴.۱۲ مفهوم ۳: انواع ناپیوستگی

۴.۴.۱۲ مفهوم ۴: پیوستگی روی بازه

در (a, b) پیوسته، در a راست، در b چپ.

نوع	تعریف	مثال
حذف‌شدنی	حد وجود دارد، $f(a)$ نه	$(x^2 - 1)/(x - 1)$ در ۱
پرشی	حد چپ $\neq$ حد راست	$ x /x$
نامتناهی	حد $\pm\infty$	$1/x$
نوسانی	حد ندارد	$\sin(1/x)$

۵.۴.۱۲ مفهوم ۵: قضایای پیوستگی

جمع، تفاضل، ضرب، تقسیم ($g \neq 0$)، ترکیب.

۶.۴.۱۲ مفهوم ۶: قطعه‌ای

در نقاط مرزی بررسی.

۷.۴.۱۲ مفهوم ۷: IVT

اگر f روی $[a, b]$ پیوسته و N بین $f(a), f(b)$ ، آنگاه $\exists c : f(c) = N$.

۸.۴.۱۲ مفهوم ۸: EVT

تابع پیوسته روی $[a, b]$ به ماکسیمم و مینیمم مطلق می‌رسد.

۹.۴.۱۲ مفهوم ۹: پیوستگی و حل معادلات

روش دوبخشی.

۱۰.۴.۱۲ مفهوم ۱۰: تعرفه‌ای

پیوسته یا ناپیوسته.

۵.۱۲ مثال‌های حل شده

مثال حل شده

مثال ۱: $x^2 + 3x - 1$ در ۲: پیوسته.

مثال حل شده

مثال ۲: $(x^2 - 4)/(x - 2)$ در ۲: حذف‌شدنی.

مثال حل شده

مثال ۳: $|x|/x$ در ۰: پرشی.

مثال حل شده

مثال ۴: $1/(x - 3)$ در ۳: نامتناهی.

مثال حل شده

مثال ۵: تابع پله‌ای: پرشی.

مثال حل شده

مثال ۶: $k: 2k + 1 = 4 \Rightarrow k = 1.5$.

مثال حل شده

مثال ۷: $a + b = 2$.

مثال حل شده

مثال ۸: $\sqrt{x-1}$ در ۱: پیوسته راست.

مثال حل شده

مثال ۹: $\ln x$ در ۱: پیوسته.

مثال حل شده

مثال ۱۰: e^x در ۰: پیوسته.

مثال حل شده

مثال ۱۱: $x^3 + x - 1$ ریشه در $(0, 1)$.

مثال حل شده

مثال ۱۲: $\cos x = x$ جواب در $(0, 1)$.

مثال حل شده

مثال ۱۳: $P(q) = -2q^2 + 40q - 100$ پیوسته.

مثال حل شده

مثال ۱۴: $S = 5/x$ / 7: پرشی.

مثال حل شده

مثال ۱۵: $AC = 1000/q + 5$: پیوسته برای $q > 0$.

مثال حل شده

مثال ۱۶: $(x^2 - 9)/(x - 3)$: حذف‌شدنی.

مثال حل شده

مثال ۱۷: $2x - 1 / x^2$: پیوسته در ۱.

مثال حل شده

مثال ۱۸: $f = \sin x / x$ برای $x \neq 0$ ، ۱ برای $x = 0$: پیوسته.

مثال حل شده

مثال ۱۹: $(1 - \cos x) / x^2$: پیوسته.

مثال حل شده

مثال ۲۰: تعرفه: ناپیوستگی پرشی.

۶.۱۲ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

فرض پیوستگی از ظاهر / اشتباه چپ/راست / شرط $g \neq 0$ / تشخیص نوع / ناپیوستگی حذف شدنی / دامنه رادیکال/لگاریتم / IVT بدون علامت.

۷.۱۲ خلاصه فصل

مفهوم	شرط	کاربرد
پیوستگی	$\lim = f(a)$	بدون پرش
حذف شدنی	$\neq f(a)$ حد	رفع
پرشی	$\lim^- \neq \lim^+$	تعرفه
نامتناهی	$\pm \infty$	مجانِب
IVT	N بین $f(a), f(b)$	وجود ریشه
EVT	پیوسته روی $[a, b]$	بهمینه

۸.۱۲ خودآزمایی

۱.۸.۱۲ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)

۱. شرط پیوستگی: الف) $f(a)$ (ب) $\lim$ (ج) $\lim = f(a)$ (د) همه
۲. $1/x$ در ۰: الف) حذف (ب) پرش (ج) نامتناهی (د) نوسانی
۳. $|x|/x$: الف) حذف (ب) پرش (ج) نامتناهی (د) پیوسته
۴. $(x^2 - 1)/(x - 1)$: الف) حذف (ب) پرش (ج) نامتناهی (د) پیوسته
۵. $\sqrt{x}$ در ۰: الف) راست (ب) چپ (ج) ناپیوسته (د) تعریف نشده
۶. IVT نیاز: الف) پیوستگی (ب) مشتق (ج) یکنوا (د) محدب

۷. $\ln x$ در ۰: الف) پیوسته ب) نامتناهی ج) پرش د) تعریف نشده
۸. $2x - 1 / x^2$: الف) پیوسته ب) پرش ج) حذف د) نامتناهی
۹. $x^2/kx + 1$: الف) ۱ ب) ۵.۱ ج) ۲ د) ۵.۲
۱۰. EVT نیاز: الف) پیوستگی روی $[a, b]$ ب) مشتق ج) یکنوا د) محدب
۱۱. همه جا پیوسته: الف) $1/x$ ب) $\ln x$ ج) $x^2 + 3x$ د) $[x]$
۱۲. $[x]$ در ۲: الف) پیوسته ب) پرش ج) حذف د) نامتناهی
۱۳. $\sin x/x$ (با تعریف ۱ در ۰): الف) پیوسته ب) پرش ج) حذف د) نامتناهی
۱۴. $f = 1$ در $0 / 1$: الف) پیوسته ب) پرش ج) حذف د) نامتناهی
۱۵. $x^3 + x - 1$: الف) $(-1, 0)$ ب) $(0, 1)$ ج) $(1, 2)$ د) $(2, 3)$

۲۰۸.۱۲ پاسخ

۱-د، ۲-ج، ۳-ب، ۴-الف، ۵-الف، ۶-الف، ۷-ب، ۸-الف، ۹-ب، ۱۰-الف، ۱۱-ج، ۱۲-ب، ۱۳-الف، ۱۴-ب، ۱۵-ب

ایست بازرسی

پایان فصل ۱۲.

۱۳ فصل ۱۳: دنباله‌ها

۱.۱۳ چکیده

دنباله، ابزار مدل‌سازی زمان‌گسسته.

۲.۱۳ اهداف یادگیری

- تعریف کند: دنباله، حسابی، هندسی، فیبوناچی، همگرایی.
- محاسبه کند: جمله n -ام، جمع n جمله.
- مدل‌سازی کند: اقساط، حقوق، استهلاك.

۳.۱۳ مقدمه طنز

اگر ۱۰٪ رشد سالانه فکر کنی «۲۰٪ در ۲۰ سال»، اشتباه است. $1.1^{20} \approx 6.73$ برابر!

۴.۱۳ مفاهیم اصلی

۱.۴.۱۳ مفهوم ۱: تعریف دنباله

$$a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

۲.۴.۱۳ مفهوم ۲: دنباله حسابی

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n), a_n = a_1 + (n-1)d, a_{n+1} - a_n = d$$

۳.۴.۱۳ مفهوم ۳: دنباله هندسی

$$|r| < 1, S_{\infty} = a_1/(1-r), S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}, a_n = a_1 r^{n-1}, a_{n+1}/a_n = r$$

۴.۴.۱۳ مفهوم ۴: تفاوت

ویژگی	حسابی	هندسی
رابطه	$a_n + d$	$a_n \cdot r$
رشد	خطی	نمایی
جمع	$\frac{n}{2}(a_1 + a_n)$	$a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$

۵.۴.۱۳ مفهوم ۵: فیوناچی

$$\lim a_{n+1}/a_n = \varphi \approx 1.618, a_1 = a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

۶.۴.۱۳ مفهوم ۶: همگرایی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L, r^n : |r| < 1 \Rightarrow 0; |r| > 1 \Rightarrow \infty; r \leq -1 \text{ ندارد.}$$

۷.۴.۱۳ مفهوم ۷: قوانین حد

حد جمع، ضرب، تقسیم.

۸.۴.۱۳ مفهوم ۸: بازگشتی

$$a_n = f(a_{n-1}, \dots)$$

۹.۴.۱۳ مفهوم ۹: میانگین

$$A \geq G, G = \sqrt{ab}, A = (a+b)/2$$

۱۰.۴.۱۳ مفهوم ۱۰: بهره مرکب

$$A_n = P(1+r)^n$$

۱۱.۴.۱۳ مفهوم ۱۱: اقساط

$$A = Pr/(1 - (1+r)^{-n})$$

۱۲.۴.۱۳ مفهوم ۱۲: ارزش فعلی

$$PV = \sum C/(1+r)^t$$

۱۳.۴.۱۳ مفهوم ۱۳: استهلاك

خط مستقیم (حسابی)، نزولی (هندسی).

۱۴.۴.۱۳ مفهوم ۱۴: پیش‌بینی فروش

$$.S_n = S_1(1 + g)^{n-1}$$

۱۵.۴.۱۳ مفهوم ۱۵: جمع کل

$$.S = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$$

۵.۱۳ مثال‌های حل شده

مثال حل شده

مثال ۱: $a_1 = 5, d = 3 \Rightarrow a_{10} = 32$

مثال حل شده

مثال ۲: $S_{20} = 440, a_n = 3 + 2(n - 1)$

مثال حل شده

مثال ۳: $a_1 = 4, r = 2 \Rightarrow a_8 = 512$

مثال حل شده

مثال ۴: $S_6 = 728, a_1 = 2, r = 3$

مثال حل شده

مثال ۵: S_∞ با $a_1 = 4, r = 0.5$: ۸

مثال حل شده

مثال ۶: حقوق ۶۰، ۵+ : سال ۱۵ = ۱۳۰، جمع = ۱۴۲۵

مثال حل شده

مثال ۷: حقوق ۶۰، ۸٪ : سال ۱۰ ۱۲۰ ≈، جمع ۸۶۹ ≈

مثال حل شده

مثال ۸: ۲۰۰ میلیون، ۱۲٪، ۸ سال : ۴۹۵.۲ ≈

مثال حل شده

مثال ۹: استهلاك ۲۵٪، ۸۰۰، ۶ سال : ۱۴۲.۴ ≈

مثال حل شده

مثال ۱۰: $PV = 100/(1.1)^5 \approx 62.1$

مثال حل شده

مثال ۱۱: $\lim(3n + 1)/(2n - 5) = 3/2$

مثال حل شده

مثال ۱۲: $\lim(0.8)^n = 0$

مثال حل شده

مثال ۱۳: $\lim(1.2)^n = \infty$

مثال حل شده

مثال ۱۴: وام ۲۰۰، ۸٪ ماهانه، ۱۲۰ قسط: $A \approx 2.6$

مثال حل شده

مثال ۱۵: فروش ۵۰۰، ۱۵٪: سال ۸ ≈ 1330

مثال حل شده

مثال ۱۶: جمع فروش ۸ سال: $6863.5 \approx$

مثال حل شده

مثال ۱۷: میانگین هندسی رشد: $۶۴\% \cdot ۲۱$

مثال حل شده

مثال ۱۸: فیبوناچی: ۵۵

مثال حل شده

مثال ۱۹: موجودی: ۲۰- در ماه ۱۲

مثال حل شده

مثال ۲۰: PV ۳۰ سالانه ۵ سال ۸٪: $119.78 \approx$

۶.۱۳ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

اشتباه حسابی/هندسی / $n - 1$ در فرمول / فرمول جمع هندسی / فرض همگرایی بدون $|r|$ / میانگین حسابی برای رشد / درصد به اعشار / قسط وام / تعداد دوره‌ها.

۷.۱۳ خلاصه فصل

مفهوم	فرمول	کاربرد
حسابی	$a_1 + (n - 1)d$	حقوق پله‌ای
جمع حسابی	$\frac{n}{2}(a_1 + a_n)$	جمع
هندسی	$a_1 r^{n-1}$	بهره
جمع هندسی	$a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$	PV
S_∞	$a_1/(1 - r)$	دائمی

۸.۱۳ خودآزمایی

۱.۸.۱۳ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)

۱. $a_{10}, a_n = 2 + 3(n - 1)$ (الف: ۲۶ (ب: ۲۹ (ج: ۳۲ (د: ۳۵
۲. S_{10} با $a_1 = 5, d = 2$ (الف: ۱۴۰ (ب: ۱۵۰ (ج: ۱۶۰ (د: ۱۷۰
۳. $a_7, a_1 = 3, r = 2$ (الف: ۹۶ (ب: ۱۹۲ (ج: ۳۸۴ (د: ۷۶۸
۴. S_5 با $a_1 = 2, r = 3$ (الف: ۱۲۱ (ب: ۲۴۲ (ج: ۳۶۳ (د: ۴۸۴
۵. S_∞ با $a_1 = 10, r = 0.5$ (الف: ۱۰ (ب: ۱۵ (ج: ۲۰ (د: ۲۵
۶. $\lim(0.5)^n$ (الف: ۰ (ب: ۵.۰ (ج: ۱ (د: ∞
۷. $\lim(1.5)^n$ (الف: ۰ (ب: ۱ (ج: ۵.۱ (د: ∞
۸. $\lim(2n + 1)/(3n - 1)$ (الف: ۰ (ب: $2/3$ (ج: $3/2$ (د: ∞
۹. ۱۰۰٪، ۳ سال (الف: ۱۲۱ (ب: ۱۳۰ (ج: ۱۰۱.۳۳ (د: ۱۴۰
۱۰. حقوق ۵۰٪، ۱۰ سال (الف: ۶۵ (ب: ۷۰ (ج: ۲۰۷۳ (د: ۸۰
۱۱. فیوناچی دهم: (الف: ۳۴ (ب: ۵۵ (ج: ۸۹ (د: ۱۴۴
۱۲. میانگین هندسی ۴ و ۹: (الف: ۶ (ب: ۵.۶ (ج: ۷ (د: ۱۳
۱۳. ۱۰۰، ۱۲۱، ۱۴۴: (الف: ۱۰٪ (ب: ۱۵٪ (ج: ۲۰٪ (د: ۲۵٪
۱۴. همگرا: (الف: $2n$ (ب: $(-1)^n$ (ج: $1/n$ (د: n^2
۱۵. PV ۱۰۰ در ۲ سال، ۱۰٪: (الف: ۸۰ (ب: ۶۴.۸۲ (ج: ۹۰ (د: ۹۵

۲.۸.۱۳ پاسخ

- ۱- ب، ۲- الف، ۳- ب، ۴- ب، ۵- ج، ۶- الف، ۷- د، ۸- ب، ۹- ج، ۱۰- ج، ۱۱- ب، ۱۲- الف، ۱۳- ج، ۱۴- ج، ۱۵- ب

ایست بازرسی

پایان فصل ۱۳.

۱۴ فصل ۱۴: مشتق و مفاهیم آن

۱.۱۴ چکیده

مشتق، قلب حساب دیفرانسیل.

۲.۱۴ اهداف یادگیری

- تعریف کند: مشتق، خط مماس، مشتق پذیری.
- محاسبه کند: مشتق با تعریف حد.
- تحلیل کند: رابطه پیوستگی و مشتق پذیری.
- تفسیر کند: مشتق به عنوان نرخ تغییر.

۳.۱۴ مقدمه طنز

مشتق مثل سرعت سنج: نرخ لحظه‌ای.

۴.۱۴ مفاهیم اصلی

۱.۴.۱۴ مفهوم ۱: شهود مشتق

نرخ تغییر لحظه‌ای.

۲.۴.۱۴ مفهوم ۲: تعریف دقیق

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} [f(a+h) - f(a)]/h$$

۳.۴.۱۴ مفهوم ۳: تفسیر هندسی

شیب خط مماس. $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

۴.۴.۱۴ مفهوم ۴: تفسیر فیزیکی

سرعت، شتاب.

۵.۴.۱۴ مفهوم ۵: نمادها

$$Df, f', df/dx, f'(x)$$

۶.۴.۱۴ مفهوم ۶: مشتق پذیری و پیوستگی

مشتق پذیری $\Rightarrow$ پیوستگی (عکس نه).

۷.۴.۱۴ مفهوم ۷: مشتق چپ و راست

$$f'_+ = f'_- \Rightarrow f' \text{ وجود دارد.}$$

۸.۴.۱۴ مفهوم ۸: نقاط غیرمشتق‌پذیر
 گوشه، بازگشت، مماس عمودی، ناپیوستگی.

۹.۴.۱۴ مفهوم ۹: مشتق مرتبه بالاتر
 $f''(x)$.

۱۰.۴.۱۴ مفهوم ۱۰: قوانین پایه

تابع	مشتق
c	0
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$1/x$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

۱۱.۴.۱۴ مفهوم ۱۱: زنجیره‌ای
 $(f(g))' = f'(g)g'$.

۱۲.۴.۱۴ مفهوم ۱۲: نمایی و لگاریتمی
 $(\ln f)' = f'/f$ ، $(e^f)' = e^f f'$.

۱۳.۴.۱۴ مفهوم ۱۳: تحلیل نهایی
 MP, MR, MC.

۱۴.۴.۱۴ مفهوم ۱۴: کشش
 $E_d = (dQ/dP)(P/Q)$.

۱۵.۴.۱۴ مفهوم ۱۵: تقریب خطی
 $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$.

۵.۱۴ مثال‌های حل‌شده

مثال حل‌شده

مثال ۱: $f(x) = x^2 + 2x$ ، $f'(1) = 4$.

مثال حل شده

مثال ۲: $f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 5$, $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 7$.

مثال حل شده

مثال ۳: $f'(x) = 6x^2 - 6x + 2$; $(x^2 + 1)(2x - 3)$.

مثال حل شده

مثال ۴: $f'(x) = -2/(x - 1)^2$; $(x + 1)/(x - 1)$.

مثال حل شده

مثال ۵: $f'(x) = 24x(3x^2 + 2)^3$; $(3x^2 + 2)^4$.

مثال حل شده

مثال ۶: $f'(x) = 4xe^{2x^2+1}$; e^{2x^2+1} .

مثال حل شده

مثال ۷: $f'(x) = 6x/(3x^2 + 1)$; $\ln(3x^2 + 1)$.

مثال حل شده

مثال ۸: $f''(x) = 12x^2 - 4$; $x^4 - 2x^2 + 3$.

مثال حل شده

مثال ۹: مماس x^3 در $y = 12x - 16$.

مثال حل شده

مثال ۱۰: $C'(q) = 30$, $C(q) = q^3 - 6q^2 + 15q + 100$; $C'(5)$.

مثال حل شده

مثال ۱۱: $MR = 100 - 4Q$, $P = 100 - 2Q$.

مثال حل شده

مثال ۱۲: $q = 40$; $C = 20q + 100$, $R = 100q - q^2$.

مثال حل شده

مثال ۱۳: $f'(1) = 2$; $2x - 1 / x^2$.

مثال حل شده

مثال ۱۴: $|x - 2|$ در ۲: مشتق ندارد.

مثال حل شده

مثال ۱۵: کشش: $E = -1$.

مثال حل شده

مثال ۱۶: $\sqrt[3]{8.1} : \approx 2.008$.

مثال حل شده

مثال ۱۷: $f''' = 120x^2 : 2x^5 - 3x^2$.

مثال حل شده

مثال ۱۸: $Q = 20L - 0.5L^2$ ، $Q'(10) = 10$.

مثال حل شده

مثال ۱۹: $U = 100 \ln x$ ، $U'(10) = 10$.

مثال حل شده

مثال ۲۰: $P = -2q^3 + 30q^2 - 100q$ ، $P''(5) = 0$.

۶.۱۴ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

مشتق $\neq$ مقدار / فرض مشتق پذیری از پیوستگی / $(fg)' \neq f'g'$ / زنجیره‌ای / $\ln x$ / چپ/راست / مشتق دوم.

۷.۱۴ خلاصه فصل

مفهوم	فرمول	کاربرد
مشتق	$\lim \Delta f / \Delta x$	نرخ
توان	nx^{n-1}	چندجمله‌ای
ضرب	$f'g + fg'$	ترکیب
تقسیم	$(f'g - fg')/g^2$	نسبت
زنجیره	$f'(g)g'$	مرکب

۸.۱۴ خودآزمایی

۱.۸.۱۴ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)

۱. $(x^3)'$ (الف: $3x$ ب: $3x^2$ ج: x^2 د: $x^4/4$)
۲. $(5)'$ (الف: ۵ ب: ۱ ج: ۰ د: $5x$)
۳. $(e^{2x})'$ (الف: e^{2x} ب: $2e^{2x}$ ج: $2xe^{2x}$ د: $e^{2x}/2$)
۴. $(\ln 3x)'$ (الف: $1/(3x)$ ب: $3/x$ ج: $1/x$ د: $3 \ln x$)
۵. $((x^2 + 1)^3)'$ (الف: $3(x^2 + 1)^2$ ب: $6x(x^2 + 1)^2$ ج: $6x(x^2 + 1)^3$ د: $3x^2$)
۶. $(x \ln x)'$ (الف: $1/x$ ب: $\ln x + 1$ ج: $\ln x$ د: $x/\ln x$)
۷. $(1/x)'$ (الف: $1/x^2$ ب: $-1/x^2$ ج: $\ln x$ د: $-1/x$)
۸. f'' از x^4 (الف: $4x^3$ ب: $12x^2$ ج: $24x$ د: ۲۴)
۹. $C = q^2 + 10q$ ، $MC(5)$ (الف: ۱۰ ب: ۲۰ ج: ۳۰ د: ۴۰)
۱۰. $(\sin 2x)'$ (الف: $\cos 2x$ ب: $2 \cos 2x$ ج: $-2 \cos 2x$ د: $2 \sin 2x$)
۱۱. $(\sqrt{x})'$ (الف: $1/(2\sqrt{x})$ ب: $2\sqrt{x}$ ج: $\sqrt{x}/2$ د: $1/\sqrt{x}$)
۱۲. $P = -q^2 + 20q$ ، $MP(5)$ (الف: ۵ ب: ۱۰ ج: ۱۵ د: ۲۰)
۱۳. مماس x^2 در ۳: (الف: $y = 6x - 9$ ب: $y = 3x - 9$ ج: $y = 6x + 9$ د: $y = 9x$)
۱۴. $(xe^x)'$ (الف: e^x ب: xe^x ج: $e^x(1+x)$ د: $e^x(1-x)$)
۱۵. $(\ln(x^2 + 1))'$ (الف: $2x/(x^2 + 1)$ ب: $1/(x^2 + 1)$ ج: $2/x$ د: $2x \ln(x^2 + 1)$)

۲.۸.۱۴ پاسخ

۱-ب، ۲-ج، ۳-ب، ۴-ج، ۵-ب، ۶-ب، ۷-ب، ۸-ب، ۹-ب، ۱۰-ب، ۱۱-الف، ۱۲-ب، ۱۳-الف، ۱۴-ج، ۱۵-الف

ایست بازرسی

پایان فصل ۱۴.

۱۵ فصل ۱۵: قوانین مشتق‌گیری

۱.۱۵ چکیده

قوانین مشتق‌گیری، مشتق را مکانیکی می‌کنند.

۲.۱۵ اهداف یادگیری

- تعریف کند: توان، ضرب، تقسیم، زنجیره‌ای، ضمنی.
- محاسبه کند: مشتق توابع جبری، نمایی، لگاریتمی، مثلثاتی.
- به کار برد: قانون زنجیره‌ای.

۳.۱۵ مقدمه طنز

فقط ۵ قانون اصلی کافی است تا ۹۹٪ توابع مدیریتی را مشتق بگیری.

۴.۱۵ مفاهیم اصلی

۱.۴.۱۵ مفهوم ۱: قانون توان

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

۲.۴.۱۵ مفهوم ۲: ضریب ثابت

$$(cf)' = cf'$$

۳.۴.۱۵ مفهوم ۳: جمع و تفاضل

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

۴.۴.۱۵ مفهوم ۴: ضرب

$$(fg)' = f'g + fg'$$

۵.۴.۱۵ مفهوم ۵: تقسیم

$$(f/g)' = (f'g - fg')/g^2.$$

۶.۴.۱۵ مفهوم ۶: زنجیره‌ای

$$(f(g))' = f'(g)g'$$

۷.۴.۱۵ مفهوم ۷: نمایی

$$(a^x)' = a^x \ln a, (e^x)' = e^x.$$

۸.۴.۱۵ مفهوم ۸: لگاریتمی

$$(\ln x)' = 1/x. \text{ مشتق لگاریتمی: } y = f \Rightarrow y' = y(\ln f)'$$

۹.۴.۱۵ مفهوم ۹: مثلثاتی

$$(\cos x)' = -\sin x, (\sin x)' = \cos x.$$

۱۰.۴.۱۵ مفهوم ۱۰: مرتبه بالاتر

$$f'', f''', \dots$$

۱۱.۴.۱۵ مفهوم ۱۱: ضمنی

دو طرف مشتق، dy/dx را حل کن.

۱۲.۴.۱۵ مفهوم ۱۲: پارامتری

$$dy/dx = (dy/dt)/(dx/dt).$$

۱۳.۴.۱۵ مفهوم ۱۳: معکوس

$$(f^{-1})'(y) = 1/f'(f^{-1}(y))$$

۱۴.۴.۱۵ مفهوم ۱۴: جدول خلاصه

$$\cos \rightarrow -\sin, \sin \rightarrow \cos, \ln x \rightarrow 1/x, e^x \rightarrow e^x, x^n \rightarrow nx^{n-1}, c \rightarrow 0$$

۱۵.۴.۱۵ مفهوم ۱۵: کاربرد

هزینه، درآمد، سود نهایی.

۵.۱۵ مثال‌های حل شده

مثال حل شده

$$\text{مثال ۱: } f = 7x^5 - 3x^2 + 8 : f' = 35x^4 - 6x$$

مثال حل شده

$$\text{مثال ۲: } (x^2 + 1)(x^3 - 2) : f' = 5x^4 + 3x^2 - 4x$$

مثال حل شده

$$\text{مثال ۳: } (3x - 1)/(x + 2) : f' = 7/(x + 2)^2$$

مثال حل شده

$$\text{مثال ۴: } (2x^3 + 5x)^4 : f' = 4(6x^2 + 5)(2x^3 + 5x)^3$$

مثال حل شده

$$\text{مثال ۵: } e^{x^2+3x} : f' = (2x + 3)e^{x^2+3x}$$

مثال حل شده

$$\text{مثال ۶: } \ln(x^3 + 1) : f' = 3x^2/(x^3 + 1)$$

مثال حل شده

$$\text{مثال ۷: } x^2 e^{3x} : f' = xe^{3x}(3x + 2)$$

مثال حل شده

$$\text{مثال ۸: } \ln x/x : f' = (1 - \ln x)/x^2$$

مثال حل شده

مثال ۹: $x^x : f' = x^x (\ln x + 1)$.

مثال حل شده

مثال ۱۰: $x^4 - 3x^3 + 2x : f'' = 12x^2 - 18x$.

مثال حل شده

مثال ۱۱: $x^2 + xy + y^2 = 7 : y' = -(2x + y)/(x + 2y)$.

مثال حل شده

مثال ۱۲: $q^3 - 6q^2 + 15q + 100 : C' = 30$.

مثال حل شده

مثال ۱۳: $P = 200 - 4Q : MR = 200 - 8Q$.

مثال حل شده

مثال ۱۴: $Q = 1000 - 20P$ ، کشش در $P = 25 : -1$.

مثال حل شده

مثال ۱۵: $(x^2 + 1)^3 e^{2x} \ln x$: با ضرب سه عاملی.

مثال حل شده

مثال ۱۶: $Q = 50L^{0.7} : Q'(100) \approx 8.79$.

مثال حل شده

مثال ۱۷: $U = 100 \ln(x + 1) : U'(10) \approx 9.09$.

مثال حل شده

مثال ۱۸: $5 \cdot 2^x : f' = 5 \ln 2 \cdot 2^x$.

مثال حل شده

مثال ۱۹: $\sqrt{3x + 1} : f' = 3/(2\sqrt{3x + 1})$.

مثال حل شده

مثال ۲۰: $\sin^2(3x) : f' = 3 \sin(6x)$.

۶.۱۵ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

فراموش ضرب n / $f'g' \neq (fg)'$ / زنجیره‌ای / $(f/g)'$ / $\ln a$ در a^x / $\ln f$ / y' در ضمنی / علامت $\cos$.

۷.۱۵ خلاصه فصل

قانون	فرمول
توان	nx^{n-1}
ضرب	cf'
جمع	$f' + g'$
ضرب	$f'g + fg'$
تقسیم	$(f'g - fg')/g^2$
زنجیره	$f'(g)g'$
نمایی	$a^x \ln a, e^x$
لگاریتمی	$1/x$

۸.۱۵ خودآزمایی

۱.۸.۱۵ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)

۱. $(x^6)'$: الف) $6x^5$ ب) $5x^6$ ج) x^5 د) $6x^6$
۲. $(e^{5x})'$: الف) e^{5x} ب) $5e^{5x}$ ج) $5xe^{5x}$ د) $e^{5x}/5$
۳. $(\ln 2x)'$: الف) $1/(2x)$ ب) $2/x$ ج) $1/x$ د) $\ln 2/x$
۴. $(xe^x)'$: الف) e^x ب) xe^x ج) $e^x(1+x)$ د) $e^x(x-1)$
۵. $(\sin 3x)'$: الف) $\cos 3x$ ب) $3 \cos 3x$ ج) $-3 \cos 3x$ د) $3 \sin 3x$
۶. $(\sqrt{x^2+1})'$: الف) $1/\sqrt{x^2+1}$ ب) $x/\sqrt{x^2+1}$ ج) $2x/\sqrt{x^2+1}$ د) $x/(2\sqrt{x^2+1})$
۷. $(3^x)'$: الف) 3^x ب) $x \cdot 3^{x-1}$ ج) $3^x \ln 3$ د) $3^x/\ln 3$
۸. $(x/(x^2+1))'$: الف) $(1-x^2)/(x^2+1)^2$ ب) $(x^2-1)/(x^2+1)^2$ ج) $1/(x^2+1)^2$ د) $2x/(x^2+1)^2$
۹. f'' از x^3 : الف) $3x^2$ ب) $6x$ ج) 6 د) x
۱۰. $(\cos 2x)'$: الف) $\sin 2x$ ب) $2 \sin 2x$ ج) $-2 \sin 2x$ د) $-2 \cos 2x$
۱۱. $(x^2 \ln x)'$: الف) $2x \ln x$ ب) x ج) $2x \ln x + x$ د) $2x \ln x - x$
۱۲. $(e^{-x^2})'$: الف) e^{-x^2} ب) $-2xe^{-x^2}$ ج) $2xe^{-x^2}$ د) $-e^{-x^2}$
۱۳. $(5x^4 - 2x + 3)'$: الف) $20x^3 - 2$ ب) $20x^3 - 2x$ ج) $20x^3 - 2$ د) $20x^4 - 2$
۱۴. $(\ln x^2)'$: الف) $1/x^2$ ب) $2/x$ ج) $2x$ د) $1/(2x)$
۱۵. $((2x+1)^3)'$: الف) $3(2x+1)^2$ ب) $6(2x+1)^2$ ج) $6(2x+1)^3$ د) $(2x+1)^2$

۲.۸.۱۵ پاسخ

- ۱- الف، ۲- ب، ۳- ج، ۴- ج، ۵- ب، ۶- ب، ۷- ج، ۸- الف، ۹- ب، ۱۰- ج، ۱۱- ج، ۱۲- ب، ۱۳- الف، ۱۴- ب، ۱۵- ب

۱۶ فصل ۱۶: دیفرانسیل

۱.۱۶ چکیده

دیفرانسیل، ابزار تقریب.

۲.۱۶ اهداف یادگیری

- تعریف کند: دیفرانسیل، دیفرانسیل کل، تقریب خطی.
- محاسبه کند: دیفرانسیل توابع، تقریب مقادیر.
- تحلیل کند: رابطه Δy و dy .

۳.۱۶ مقدمه طنز

دیفرانسیل مثل خطکش سریع است.

۴.۱۶ مفاهیم اصلی

۱.۴.۱۶ مفهوم ۱: تعریف

$$dy = f'(x)dx$$

۲.۴.۱۶ مفهوم ۲: تقریب خطی

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x$$

۳.۴.۱۶ مفهوم ۳: دیفرانسیل کل

$$dz = f_x dx + f_y dy$$

۴.۴.۱۶ مفهوم ۴: تحلیل حساسیت

$$\Delta y/y \approx (f'/f)\Delta x$$

کشش: $E = xf'/f$

۵.۴.۱۶ مفهوم ۵: تخمین خطا

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x$$

۶.۴.۱۶ مفهوم ۶: مقایسه

۷.۴.۱۶ مفهوم ۷: تقریب توابع پیچیده

$\sin$ ، $\ln$ ، $\sqrt{\quad}$ و ...

مفهوم	تعریف	تفسیر
Δy	$f(x + \Delta x) - f(x)$	واقعی
dy	$f'(x)\Delta x$	تقریبی
خطا	$ \Delta y - dy $	تقریب

۸.۴.۱۶ مفهوم ۸: رگرسیون

β به عنوان مشتق تقریبی.

۹.۴.۱۶ مفهوم ۹: بهینه سازی

در بهینه، $f' \approx 0$ ، پس تغییرات کوچک اثر کمی دارند.

۱۰.۴.۱۶ مفهوم ۱۰: بهره مرکب

$$\partial A / \partial r = tA$$

۱۱.۴.۱۶ مفهوم ۱۱: تحلیل هزینه

$$\Delta C \approx C'(q)\Delta q$$

۱۲.۴.۱۶ مفهوم ۱۲: مشتق لگاریتمی

$$d(\ln y) = dy/y$$

۱۳.۴.۱۶ مفهوم ۱۳: اقتصاد کلان

$$dY = dC + dI + dG + dX - dM$$

۱۴.۴.۱۶ مفهوم ۱۴: خطای تقریب

$$\text{خطا } (\Delta x)^2 \sim$$

۱۵.۴.۱۶ مفهوم ۱۵: جمع بندی

تابع	دیفرانسیل	کاربرد
x^n	$nx^{n-1}dx$	چند جمله ای
e^x	$e^x dx$	رشد
$\ln x$	dx/x	نرخ نسبی
$\sin x$	$\cos x dx$	نوسان
$f(g)$	$f'(g)g'dx$	مرکب
$f(x, y)$	$f_x dx + f_y dy$	چند متغیره

۵.۱۶ مثال‌های حل شده

مثال حل شده

مثال ۱: $y = x^3 + 2x$ ، $dy = 1.4$ در $x = 2$ ، $dx = 0.1$.

مثال حل شده

مثال ۲: $\sqrt{9.1} \approx 3.0167$.

مثال حل شده

مثال ۳: $Q = 500 - 5P$ ، $\Delta P = 2$ ، $\Delta Q \approx -10$.

مثال حل شده

مثال ۴: حجم مکعب، خطای ۲٪ در ضلع: خطای حجم ۶٪.

مثال حل شده

مثال ۵: $\ln 1.05 \approx 0.05$.

مثال حل شده

مثال ۶: $z = x^2y$ ، $dz = 4.2$.

مثال حل شده

مثال ۷: $A = 100(1 + r)^{10}$ ، $\Delta A \approx 7.76$.

مثال حل شده

مثال ۸: $C = q^2 + 20q + 500$ ، $\Delta C \approx 160$.

مثال حل شده

مثال ۹: $\sin 0.1 \approx 0.1$.

مثال حل شده

مثال ۱۰: در بهینه، $\Delta P \approx 0$.

مثال حل شده

مثال ۱۱: نرخ رشد نسبی ۱۵٪.

مثال حل شده

مثال ۱۲: $(1.02)^{10} \approx 1.2$.

مثال حل شده

مثال ۱۳: $dP = 20, P(x, y) = 20x + 30y - xy$.

مثال حل شده

مثال ۱۴: $\Delta C \approx 210$.

مثال حل شده

مثال ۱۵: $\sqrt[3]{8.2} \approx 2.0167$.

مثال حل شده

مثال ۱۶: مساحت دایره: خطای ۲٪.

مثال حل شده

مثال ۱۷: $\Delta Q \approx 10, Q = 50L^{0.5}$.

مثال حل شده

مثال ۱۸: $\Delta PV \approx -31.5, PV = 1000/(1+r)^5$.

مثال حل شده

مثال ۱۹: $\ln 0.98 \approx -0.02$.

مثال حل شده

مثال ۲۰: $dy = 2.0, \Delta y = 2.04, x^2$.

۶.۱۶ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

مشتق $\neq$ دیفرانسیل / فراموش dx / تغییرات بزرگ / چندمتغیره / خطای نسبی / علامت منفی / دقت ۱۰۰٪.

مفهوم	فرمول	کاربرد
دیفرانسیل	$f'(x)dx$	تقریب
تقریب خطی	$f(a) + f'(a)\Delta x$	محاسبه
دیفرانسیل کل	$f_x dx + f_y dy$	چندمتغیره
خطای نسبی	$(f'/f)\Delta x$	تخمین

۷.۱۶ خلاصه فصل

۸.۱۶ خودآزمایی

۱.۸.۱۶ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)

۱. dy از x^4 : الف) $4x^3$ ب) $4x^3 dx$ ج) $x^4 dx$ د) $4x^4 dx$
۲. dy از e^{2x} : الف) e^{2x} ب) $2e^{2x} dx$ ج) $2xe^{2x} dx$ د) e^{2x}
۳. $\sqrt{16.1}$: الف) 0.125 ب) 1.4 ج) 0.14 د) 2.4
۴. dy از $\ln x$: الف) dx/x ب) $x dx$ ج) $\ln x dx$ د) $1/x$
۵. $f = x^2$, $x = 3$, $dx = 0.1$: الف) 3.0 ب) 6.0 ج) 9.0 د) 2.1
۶. خطای حجم مکعب با ۱٪ در ضلع: الف) ۱٪ ب) ۲٪ ج) ۳٪ د) ۴٪
۷. $\ln 1.02$: الف) 0.02 ب) 2.0 ج) 0.020 د) 0.0200
۸. dz از $x^2 y$: الف) $2xy dx$ ب) $x^2 dy$ ج) $2xy dx + x^2 dy$ د) $2x dx + y dy$
۹. $C = q^2 + 10q$, $q = 10$, $\Delta q = 1$: الف) 20 ب) 30 ج) 40 د) 50
۱۰. $\sin 0.02$: الف) 0.02 ب) 2.0 ج) 0.020 د) 0.0200
۱۱. خطای مساحت دایره با ۲٪: الف) ۱٪ ب) ۲٪ ج) ۳٪ د) ۴٪
۱۲. dy از $\sin 3x$: الف) $\cos 3x dx$ ب) $3 \cos 3x dx$ ج) $-3 \cos 3x dx$ د) $3 \sin 3x dx$
۱۳. نرخ رشد نسبی $S = 500e^{0.1t}$: الف) ۱٪ ب) ۵٪ ج) ۱۰٪ د) ۵۰٪
۱۴. $(1.01)^{20}$: الف) 1.1 ب) 2.1 ج) 3.1 د) 5.1
۱۵. x^2 , $x = 2$, $\Delta x = 0.1$: الف) $\Delta y = dy$ ب) $\Delta y > dy$ ج) $\Delta y < dy$ د) نامشخص

۲.۸.۱۶ پاسخ

- ۱- ب، ۲- ب، ۳- الف، ۴- الف، ۵- ب، ۶- ج، ۷- الف، ۸- ج، ۹- ب، ۱۰- الف، ۱۱- د، ۱۲- ب، ۱۳- ج، ۱۴- ب، ۱۵- ب

ایست بازرسی

پایان فصل ۱۶.

۱۷ فصل ۱۷: بهینه‌سازی

۱.۱۷ چکیده

بهینه‌سازی، قلب تصمیم‌گیری مدیریتی.

۲.۱۷ اهداف یادگیری

- تعریف کند: نقطه بحرانی، ماکسیمم، مینیمم، تقعر، نقطه عطف.

- محاسبه کند: نقاط بحرانی، آزمون مشتق اول و دوم.
- بهینه‌سازی کند: سود، هزینه، درآمد، EOQ.
- مدل‌سازی کند: با محدودیت (لاگرانژ)، چندمتغیره.

۳.۱۷ مقدمه طنز

بهینه‌سازی مثل پیدا کردن قله کوه در مه است.

۴.۱۷ مفاهیم اصلی

۱.۴.۱۷ مفهوم ۱: نقطه بحرانی

$f'(c) = 0$ یا تعریف نشده.

۲.۴.۱۷ مفهوم ۲: ماکسیم و مینیم موضعی

$f(c) \leq f(x) / f(c) \geq f(x)$ در همسایگی.

۳.۴.۱۷ مفهوم ۳: ماکسیم و مینیم مطلق

روی مجموعه D .

۴.۴.۱۷ مفهوم ۴: آزمون مشتق اول

علامت f' از $+$ به $-$: ماکسیم. از $-$ به $+$: مینیم.

۵.۴.۱۷ مفهوم ۵: آزمون مشتق دوم

$f''(c) < 0$: ماکسیم. $f''(c) > 0$: مینیم. $= 0$: بی نتیجه.

۶.۴.۱۷ مفهوم ۶: تقعر و تحدب

$f'' < 0$: مقعر. $f'' > 0$: محدب.

۷.۴.۱۷ مفهوم ۷: نقطه عطف

$f'' = 0$ و تقعر تغییر کند.

۸.۴.۱۷ مفهوم ۸: بهینه‌سازی سود

$P'' < 0, MR = MC$

۹.۴.۱۷ مفهوم ۹: حداقل هزینه

$MC = AC$

۱۰.۴.۱۷ مفهوم ۱۰: بهینه‌سازی درآمد

$MR = 0$

۱۱.۴.۱۷ مفهوم ۱۱: EOQ

$$Q^* = \sqrt{2DS/H}$$

۱۲.۴.۱۷ مفهوم ۱۲: لاگرانژ

$$\nabla \mathcal{L} = 0, \mathcal{L} = f - \lambda g$$

۱۳.۴.۱۷ مفهوم ۱۳: چندمتغیره

$$f_y = 0, f_x = 0, \text{ ماتریس هسیان.}$$

۱۴.۴.۱۷ مفهوم ۱۴: کشش و بهینه

$$\text{در } MR = 0 : E_d = -1$$

۱۵.۴.۱۷ مفهوم ۱۵: مراحل

تابع هدف، محدودیت، مشتق، آزمون، مقدار، تفسیر.

۵.۱۷ مثال‌های حل شده

مثال حل شده

مثال ۱: $f = -x^2 + 6x + 5$: ماکسیمم ۱۴ در $x = 3$.

مثال حل شده

مثال ۲: $f = x^2 - 8x + 20$: مینیمم ۴ در $x = 4$.

مثال حل شده

مثال ۳: $R = 80q - 2q^2$, $C = 10q + 100$: سود $q = 17.5$, سود ۵۵۱۲.

مثال حل شده

مثال ۴: $C = 0.5q^2 + 50q + 5000$: حداقل AC در ۱۰۰.

مثال حل شده

مثال ۵: $P = 300 - 3Q$: حداکثر درآمد ۷۵۰۰ در $Q = 50$.

مثال حل شده

مثال ۶: EOQ: ≈ 707 .

مثال حل شده

مثال ۷: لاگرانژ: $f = x^2y$ با $x + y = 6$: حداکثر ۳۲.

مثال حل شده

مثال ۸: $f = 10x + 20y - x^2 - y^2$: ماکسیمم ۱۲۵.

مثال حل شده

مثال ۹: $f = x^3 - 6x^2 + 9x$: نقطه عطف در ۲.

مثال حل شده

مثال ۱۰: $[0, 4]$: ماکسیمم ۲۰ در ۴، مینیمم ۰ در ۲.

مثال حل شده

مثال ۱۱: $P = 500 - 5Q$, $C = 50Q + 1000$: $Q = 45$: سود ۹۱۲۵.

مثال حل شده

مثال ۱۲: تبلیغات: $S = 1000 + 50x - x^2$: حداکثر ۱۶۲۵ در ۲۵.

مثال حل شده

مثال ۱۳: $C = q^3 - 12q^2 + 60q + 100$: بدون نقطه بحرانی.

مثال حل شده

مثال ۱۴: $U = xy$, $2x + y = 20$: حداکثر ۳۲.

مثال حل شده

مثال ۱۵: $f = x + 2y + 3z$, $x + y + z = 10$: حداکثر ۳۰.

مثال حل شده

مثال ۱۶: $-x^2 - 2y^2 + 4x + 8y$: ماکسیمم ۱۲.

مثال حل شده

مثال ۱۷: $x^2 - y^2$: نقطه زینی.

مثال حل شده

مثال ۱۸: مالیات ۱۰٪: $q = 50$ ، سود پس از مالیات ۱۸۰۰.

مثال حل شده

مثال ۱۹: $A = 1000(1 + r)^{10}$: ماکسیمم در ۱۰٪.

مثال حل شده

مثال ۲۰: $P(x, y) = 20x + 30y - x^2 - 2y^2 - xy$: ≈ 157.2 .

۶.۱۷ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

فرض ماکسیمم هر نقطه / فراموش آزمون دوم / اشتباه ماکسیمم/مینیمم / فراموش مرز / هسیان / فراموش محدودیت / نقطه عطف.

۷.۱۷ خلاصه فصل

مفهوم	شرط	کاربرد
نقطه بحرانی	$f' = 0$	نامزد
ماکسیمم	$f'' < 0$	سود
مینیمم	$f'' > 0$	هزینه
سود	$MR = MC$	بهینه
EOQ	$\sqrt{2DS/H}$	موجودی
لاگرانژ	$\nabla f = \lambda \nabla g$	محدودیت

۸.۱۷ خودآزمایی

۱.۸.۱۷ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)

۱. ماکسیمم $f = -x^2 + 4x$ (الف) $x = 1$ (ب) $x = 2$ (ج) $x = 3$ (د) $x = 4$
۲. مینیمم $f = x^2 - 6x + 5$ (الف) $x = 2$ (ب) $x = 3$ (ج) $x = 4$ (د) $x = 5$
۳. $f'' > 0$ (الف) ماکسیمم (ب) مینیمم (ج) نقطه عطف (د) نامشخص
۴. حداکثر سود $P = -q^2 + 20q - 50$ (الف) ۵۰ (ب) ۱۰۰ (ج) ۱۵۰ (د) ۲۰۰
۵. حداقل $x^2 + 4x + 10$ (الف) ۲ (ب) ۴ (ج) ۶ (د) ۸
۶. $R = 100Q - Q^2$ ، حداکثر درآمد: (الف) ۲۵۰۰ (ب) ۵۰۰۰ (ج) ۷۵۰۰ (د) ۱۰۰۰۰
۷. $EOQ: H = 2, S = 40, D = 1000$ (الف) ۱۰۰ (ب) ۲۰۰ (ج) ۳۰۰ (د) ۴۰۰
۸. $f' = 0, f'' = 0$ (الف) ماکسیمم (ب) مینیمم (ج) عطف یا زینی (د) نامشخص
۹. حداکثر xy با $x + y = 8$ (الف) ۱۲ (ب) ۱۶ (ج) ۲۰ (د) ۲۴
۱۰. در بهینه درآمد، MR : (الف) مثبت (ب) منفی (ج) صفر (د) نامشخص
۱۱. $AC = q + 100/q$ ، حداقل: (الف) ۵ (ب) ۱۰ (ج) ۱۵ (د) ۲۰

۱۲. $\det(H) < 0$ (الف) ماکسیمم (ب) مینیمم (ج) زینی (د) عطف
۱۳. $f = -2x^2 + 12x - 5$ (الف) ۱۰ (ب) ۱۳ (ج) ۱۶ (د) ۲۰
۱۴. $Q = 20L - L^2$ (الف) ۵۰ (ب) ۱۰۰ (ج) ۱۵۰ (د) ۲۰۰
۱۵. تعداد معادلات در لاگرانژ: (الف) فقط مشتق‌ها (ب) مشتق‌ها + محدودیت (ج) فقط محدودیت (د) هیچ‌کدام

۲۰۸.۱۷ پاسخ

۱-ب، ۲-ب، ۳-ب، ۴-الف، ۵-ج، ۶-الف، ۷-ب، ۸-ج، ۹-ب، ۱۰-ج، ۱۱-ب، ۱۲-ج، ۱۳-ب، ۱۴-ب، ۱۵-ب

ایست بازرسی

پایان فصل ۱۷.

۱۸ فصل ۱۸: بهره و بهره مرکب

۱.۱۸ چکیده

بهره، اجاره پول.

۲.۱۸ اهداف یادگیری

- تعریف کند: بهره، اصل، نرخ، مرکب، پیوسته، EAR.
- محاسبه کند: بهره ساده، مرکب، پیوسته، EAR. PV.
- تحلیل کند: تفاوت ساده و مرکب.
- مدل‌سازی کند: سرمایه‌گذاری، وام، پس‌انداز.

۳.۱۸ مقدمه طنز

انیشیتین: «بهره مرکب، هشتمین عجایب جهان است.»

۴.۱۸ مفاهیم اصلی

۱.۴.۱۸ مفهوم ۱: اصطلاحات

P (اصل)، r (نرخ)، t (زمان)، I (بهره)، A (ارزش آینده)، PV (ارزش فعلی).

۲.۴.۱۸ مفهوم ۲: بهره ساده

$$A = P(1 + rt), I = Prt$$

۳.۴.۱۸ مفهوم ۳: بهره مرکب

$$A = P(1 + r)^t$$

۴.۴.۱۸ مفهوم ۴: مرکب n بار

$$A = P(1 + r/n)^{nt}$$

۵.۴.۱۸ مفهوم ۵: پیوسته

$$A = Pe^{rt}$$

۶.۴.۱۸ مفهوم ۶: EAR

$$EAR = (1 + r/n)^n - 1, \text{ پیوسته: } e^r - 1$$

۷.۴.۱۸ مفهوم ۷: نرخ اسمی از مؤثر

$$r = n[(1 + EAR)^{1/n} - 1]$$

۸.۴.۱۸ مفهوم ۸: ارزش فعلی

$$PV = FV/(1 + r)^t, \text{ پیوسته: } FVe^{-rt}$$

۹.۴.۱۸ مفهوم ۹: تنزیل

$$DF = 1/(1 + r)^t$$

۱۰.۴.۱۸ مفهوم ۱۰: قاعده ۷۲

$$t \approx 72/(r \times 100)$$

۱۱.۴.۱۸ مفهوم ۱۱: قاعده ۶۹

$$t = \ln 2/r$$

۱۲.۴.۱۸ مفهوم ۱۲: نرخ واقعی

$$r_{real} \approx r - \pi$$

۱۳.۴.۱۸ مفهوم ۱۳: ارزش زمانی پول

یک تومان امروز < یک تومان فردا.

۱۴.۴.۱۸ مفهوم ۱۴: NPV

$$NPV = \sum CF_t/(1 + r)^t - C_0$$

۱۵.۴.۱۸ مفهوم ۱۵: قسط وام

$$A = Pr/(1 - (1 + r)^{-n})$$

۵.۱۸ مثال‌های حل شده

مثال حل شده

مثال ۱: ۲۰۰ میلیون ۱۵٪ ساده ۴ سال: $A = 320$ ، $I = 120$.

مثال حل شده

مثال ۲: ۵۰ میلیون ۱۰٪ ۵ سال: $A \approx 80.53$.

مثال حل شده

مثال ۳: ۱۰۰ میلیون ۱۲٪ ماهانه ۳ سال: $A \approx 143.08$.

مثال حل شده

مثال ۴: ۳۰۰ میلیون ۸٪ پیوسته ۱۰ سال: $A \approx 667.66$.

مثال حل شده

مثال ۵: EAR ۱۸٪ فصلی: ۱۹٪، ۲۵٪.

مثال حل شده

مثال ۶: PV ۵۰۰ در ۸ سال ۱۲٪: ≈ 201.94 .

مثال حل شده

مثال ۷: دوبرابر شدن ۹٪: ۸ سال.

مثال حل شده

مثال ۸: نرخ واقعی ۲۰٪، تورم ۱۵٪: $\approx 4.35\%$.

مثال حل شده

مثال ۹: NPV با سرمایه ۱۰۰، جریان ۳،۴۰ سال: $-0.53 \approx$.

مثال حل شده

مثال ۱۰: قسط ۳۰۰، ۲۴٪، ۱۲ ماه: ≈ 28.37 .

مثال حل شده

مثال ۱۱: مقایسه بانک A و B: B بهتر (۱۶٪، ۶۴٪).

مثال حل شده

مثال ۱۲: ۱۰۰ تا ۳۰۰ با ۱۰٪: ۱۱.۵۳ ≈ سال.

مثال حل شده

مثال ۱۳: نرخ لازم ۱۰۰ تا ۲۵۰ در ۱۰ سال: ۹٪.

مثال حل شده

مثال ۱۴: PV: ۱۰۰۰، ۶٪ پیوسته، ۵ سال: ۷۴۰.۸ ≈.

مثال حل شده

مثال ۱۵: ۱۰۰، ۱۰٪ روزانه، ۱ سال: ۱۱۰.۵۲ ≈.

مثال حل شده

مثال ۱۶: اثر مرکب سازی: ۹۵.۱۰۷، ۱.۱۱۱، ۲۸.۱۱۱.

مثال حل شده

مثال ۱۷: دو پروژه: A کمی بهتر.

مثال حل شده

مثال ۱۸: بازپرداخت ۲۰۰، ۱۸٪: ≈ ماه.

مثال حل شده

مثال ۱۹: پس انداز ماهانه ۱ میلیون ۱۲٪ ۲۰ سال: ۹۸۹ ≈ میلیون.

مثال حل شده

مثال ۲۰: اقساط گران تر از یکجا (۸۲۵ < ۸۰۰).

۶.۱۸ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

ساده/مرکب / r/n و nt / اسمی/مؤثر / نرخ سالانه در دوره ماهانه / علامت در PV / درصد به اعشار / تورم / فرمول قسط.

مفهوم	فرمول	کاربرد
ساده	Prt	کوتاه مدت
مرکب	$P(1+r)^t$	سرمایه
پیوسته	Pe^{rt}	پیشرفته
EAR	$(1+r/n)^n - 1$	مقایسه
PV	$FV(1+r)^{-t}$	ارزیابی
NPV	$\sum CF(1+r)^{-t} - C_0$	پروژه
قسط	$Pr/(1 - (1+r)^{-n})$	بازپرداخت

۷.۱۸ خلاصه فصل

۸.۱۸ خودآزمایی

۱.۸.۱۸ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)

۱. بهره ساده ۱۰۰، ۱۰٪، ۳ سال: الف) ۲۰ (ب) ۳۰ (ج) ۴۰ (د) ۵۰
۲. $100(1.1)^2$: الف) ۱۲۰ (ب) ۱۲۱ (ج) ۱۲۲ (د) ۱۲۵
۳. ۵۰، ۸٪ ساده، ۵ سال: الف) ۶۰ (ب) ۷۰ (ج) ۷۵ (د) ۸۰
۴. EAR ۱۲٪ ماهانه: الف) ۱۲٪ (ب) ۱۲٪ (ج) ۳۶٪ (د) ۶۸٪ (۱۳٪)
۵. $100e^{0.5}$: الف) ۱۵۰ (ب) ۱۶۰ (ج) ۱۶۵ (د) ۱۷۰
۶. PV ۲۰۰ در ۵ سال، ۱۰٪: الف) ۱۰۰ (ب) ۱۲۴ (ج) ۱۴۰ (د) ۱۵۰
۷. قاعده ۷۲ با ۶٪: الف) ۸ (ب) ۱۰ (ج) ۱۲ (د) ۱۴
۸. نرخ واقعی ۱۸٪، تورم ۱۲٪: الف) ۴٪ (ب) ۵٪ (ج) ۶٪ (د) ۳۰٪
۹. $100(1.03)^8$: الف) ۱۲۴ (ب) ۱۲۵ (ج) ۱۲۶ (د) ۱۳۰
۱۰. دوبرابر ۹٪ دقیق: الف) ۵.۷ (ب) ۸ (ج) ۵.۸ (د) ۹
۱۱. نرخ واقعی ۵٪ اسمی، ۸٪ تورم: الف) ۳٪ (ب) ۱۳٪ (ج) - (د) -
۱۲. $500e^{-0.5}$: الف) ۲۵۰ (ب) ۳۰۰ (ج) ۳۰۳ (د) ۳۵۰
۱۳. ۲۰۰، ۵٪ ساده، ۳ سال: الف) ۲۱۵ (ب) ۲۲۰ (ج) ۲۳۰ (د) ۲۴۰
۱۴. نرخ اسمی ۱۰٪، EAR=۱۰٪ ماهانه: الف) ۵۷٪ (ب) ۱۰٪ (ج) ۵٪ (د) ۱۱٪
۱۵. ۱۰۰ به ۴۰۰ در ۱۵ سال: الف) ۵٪ (ب) ۶٪ (ج) ۶۸٪ (د) ۱۲٪ (۱۵٪)

۲.۸.۱۸ پاسخ

۱-ب، ۲-ب، ۳-ب، ۴-ج، ۵-ج، ۶-ب، ۷-ج، ۸-ب، ۹-ج، ۱۰-ب، ۱۱-د، ۱۲-ج، ۱۳-ج، ۱۴-الف، ۱۵-ب

ایست بازرسی

پایان فصل ۱۸.

۱۹ فصل ۱۹: اقساط و برنامه‌ریزی مالی

۱.۱۹ چکیده

اقساط، ستون فقرات برنامه‌ریزی مالی.

۲.۱۹ اهداف یادگیری

- تعریف کند: اقساط، PV ، FV ، PMT صندوق ذخیره، IRR . Perpetuity
- محاسبه کند: PMT ، PV ، FV جدول استهلاك.
- تحليل کند: پيش پرداخت/پس پرداخت، IRR .
- مدل سازی کند: وام، پس انداز، بازنشستگی.

۳.۱۹ مقدمه طنز

اگر خانه ۵ میلیارد، ۲۰ سال قسط و ۱۸٪، قسط ماهانه $\approx$ میلیون! نه ۲۰ میلیون.

۴.۱۹ مفاهيم اصلي

۱.۴.۱۹ مفهوم ۱: اصطلاحات

PMT (قسط)، n (تعداد)، r (نرخ)، PV ، FV .

۲.۴.۱۹ مفهوم ۲: PV اقساط

$$PV = PMT \cdot \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}$$

۳.۴.۱۹ مفهوم ۳: FV اقساط

$$FV = PMT \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

۴.۴.۱۹ مفهوم ۴: قسط وام

$$PMT = \frac{PV \cdot r}{1 - (1+r)^{-n}}$$

۵.۴.۱۹ مفهوم ۵: پيش پرداخت

$$PV_{due} = PV \times (1 + r)$$

۶.۴.۱۹ مفهوم ۶: جدول استهلاك

بهره = مانده قبل $\times r$ ، اصل = قسط - بهره.

۷.۴.۱۹ مفهوم ۷: صندوق ذخيره

$$PMT = FV \cdot r / ((1 + r)^n - 1)$$

۸.۴.۱۹ مفهوم ۸: Perpetuity

$PV = PMT/r$ ؛ رشدکننده: $PMT/(r - g)$ ، $r > g$.

۹.۴.۱۹ مفهوم ۹: IRR

نرخي که $NPV = 0$.

۱۰.۴.۱۹ مفهوم ۱۰: دوره بازپرداخت
 C_0/CF

۱۱.۴.۱۹ مفهوم ۱۱: ARR
سود متوسط / سرمایه.

۱۲.۴.۱۹ مفهوم ۱۲: بازنشستگی
ابتدا مبلغ لازم، سپس پس انداز ماهانه.

۱۳.۴.۱۹ مفهوم ۱۳: اجاره vs خرید
مقایسه PV.

۱۴.۴.۱۹ مفهوم ۱۴: لیزینگ
مقایسه PV با خرید نقدی.

۱۵.۴.۱۹ مفهوم ۱۵: بودجه بندی
انتخاب ترکیب پروژه ها با NPV.

۵.۱۹ مثال های حل شده

مثال حل شده

مثال ۱: PV ۵ ماهانه، ۱٪، ۲۴ ماه: ≈ 106.2 .

مثال حل شده

مثال ۲: FV ۳ ماهانه، ۸٪، ۶۰ ماه: ≈ 229.77 .

مثال حل شده

مثال ۳: قسط ۴۰۰، ۱٪، ۸۴ ماه: ≈ 7.59 .

مثال حل شده

مثال ۴: صندوق ۱۰۰۰ در ۱۰ سال ۱۰٪: ۷۵.۶۲.

مثال حل شده

مثال ۵: Perpetuity ۸۰، ۱۰٪: ۸۰۰.

مثال حل شده

مثال ۶: رشد ۴٪، ۱۲٪، ۵۰: ۶۲۵.

مثال حل شده

مثال ۷: جدول ۵۰، ۵٪، ۳ قسط.

مثال حل شده

مثال ۸: $IRR \approx 23.4\%$.

مثال حل شده

مثال ۹: بازپرداخت ۳۰۰، ۱۰۰: ۳ سال.

مثال حل شده

مثال ۱۰: اجاره vs خرید: خرید بهتر.

مثال حل شده

مثال ۱۱: بازنشستگی: پس انداز ۳۴.۱ میلیون ماهانه.

مثال حل شده

مثال ۱۲: پیش پرداخت ۵۰: ۷ قسط کمتر.

مثال حل شده

مثال ۱۳: لیزینگ: $PV \approx 400.66$.

مثال حل شده

مثال ۱۴: نرخ ماهانه ۸۲٪، ۲۴ EAR، ۲٪.

مثال حل شده

مثال ۱۵: NPV پروژه: -40.7.

مثال حل شده

مثال ۱۶: وام B کل پرداخت کمتر.

مثال حل شده

مثال ۱۷: پس انداز هدف: ۱۲.۶ ماهانه.

مثال حل شده

مثال ۱۸: اجاره پیش پرداخت: ۷.۱۱۳.

مثال حل شده

مثال ۱۹: ARR: ۲۰٪.

مثال حل شده

مثال ۲۰: تحلیل حساسیت: قسط ۷٪.۶ افزایش.

۶.۱۹ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

PV/FV / تقسیم نرخ / فرمول PMT / پیش پرداخت / ماه vs سال / علامت توان / Perpetuity رشد / جدول استهلاك.

۷.۱۹ خلاصه فصل

مفهوم	فرمول	کاربرد
PV اقساط	$PMT \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$	ارزش امروز
FV اقساط	$PMT \frac{(1+r)^n-1}{r}$	ارزش آینده
قسط	$PVr / (1 - (1+r)^{-n})$	وام
صندوق	$FVr / ((1+r)^n - 1)$	هدف
Perpetuity	PMT/r	دائمی

۸.۱۹ خودآزمایی

۱.۸.۱۹ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)

۱. قسط ۱۰۰، ۱٪، ۱۲ ماه: الف) ۸۸.۸ ب) ۵۰.۹ ج) ۱۰ د) ۱۱
۲. PV ۵ ماهانه، ۱٪، ۲۴ ماه: الف) ۱۰۰ ب) ۱۰۶ ج) ۱۱۰ د) ۱۲۰
۳. FV ۲ ماهانه، ۵٪، ۱۲ ماه: الف) ۶۶.۲۴ ب) ۲۵ ج) ۵۰.۲۵ د) ۲۶
۴. Perpetuity ۱۰۰، ۸٪: الف) ۸۰۰ ب) ۱۰۰۰ ج) ۱۲۵۰ د) ۱۵۰۰
۵. رشد ۵٪، ۱۲٪، ۵۰: الف) ۷.۴۱۶ ب) ۵۰۰ ج) ۳.۷۱۴ د) ۱۰۰۰
۶. صندوق ۱۰۰۰، ۱۰٪، ۵ سال: الف) ۱۵۰ ب) ۸.۱۶۳ ج) ۱۷۵ د) ۲۰۰
۷. قسط ۲۰۰، ۲٪، ۲۴: الف) ۵.۹ ب) ۵۷.۱۰ ج) ۱۱ د) ۱۲
۸. IRR ۱۰۰/۶۰/۲ سال: الف) ۱۰٪ ب) ۱۳٪ ج) ۱۵٪ د) ۲۰٪
۹. بازپرداخت ۳۰۰/۱۰۰: الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵
۱۰. PV اجاره ۲۰ ماهانه ۱٪ ۱۲ ماه: الف) ۲۲۰ ب) ۱.۲۲۵ ج) ۲۳۰ د) ۲۴۰
۱۱. PMT ۵۰۰ در ۵ سال ۱٪ ماهانه: الف) ۵.۵ ب) ۱۲.۶ ج) ۷ د) ۸
۱۲. ARR ۴۰۰/۸۰: الف) ۱۰٪ ب) ۱۵٪ ج) ۲۰٪ د) ۲۵٪
۱۳. دو برابر شدن نرخ: الف) دو برابر ب) کمتر از دو برابر ج) بیشتر د) ثابت
۱۴. PV ۱۰ ماهانه، ۵٪، ۶۰: الف) ۵۰۰ ب) ۳.۵۱۷ ج) ۶۰۰ د) ۶۲۰
۱۵. برای ارزش گذاری پروژه بهترین: الف) IRR ب) NPV ج) ARR د) Payback

۲.۸.۱۹ پاسخ

۱- الف، ۲- ب، ۳- الف، ۴- ج، ۵- ج، ۶- ب، ۷- ب، ۸- ب، ۹- ب، ۱۰- ب، ۱۱- ب، ۱۲- ج، ۱۳- ب، ۱۴- ب، ۱۵- ب

ایست بازرسی

پایان فصل ۱۹.

۲۰ فصل ۲۰: کاربردهای مشتق در مالی

۱.۲۰ چکیده

مشتق در مالی، زبان تحلیل نهایی.

۲.۲۰ اهداف یادگیری

- تعریف کند: MC ، MR ، MP ، کشش، دیرش، IRR .
- محاسبه کند: MC ، MR ، MP ، کشش، حساسیت PV .
- بهینه‌سازی کند: سود، درآمد، NPV ، EOQ .
- تحلیل کند: رابطه کشش و درآمد، ریسک.

۳.۲۰ مقدمه طنز

مشتق در مالی مثل دوربین پرسرعت است.

۴.۲۰ مفاهیم اصلی

۱.۴.۲۰ مفهوم ۱: مشتق به عنوان نرخ

$$U' = MU \quad P' = MP \quad R' = MR \quad C' = MC$$

۲.۴.۲۰ مفهوم ۲: MC ، MR ، MP

$$MP = MR - MC$$

۳.۴.۲۰ مفهوم ۳: بهینه‌سازی سود

$$P'' < 0, MR = MC$$

۴.۴.۲۰ مفهوم ۴: کشش

$$E_d = (dQ/dP)(P/Q) \quad |E| > 1: \text{باکشش} \quad |E| < 1: \text{کم‌کشش}$$

۵.۴.۲۰ مفهوم ۵: MR و کشش

$$MR = P(1 + 1/E_d)$$

۶.۴.۲۰ مفهوم ۶: بهینه درآمد

$$E = -1, MR = 0$$

۷.۴.۲۰ مفهوم ۷: مالیات و کشش

سهم مصرف‌کننده: $-E_d/(E_s - E_d)$

۸.۴.۲۰ مفهوم ۸: نرخ رشد

$$y'/y$$

۹.۴.۲۰ مفهوم ۹: بهره پیوسته

$$dA/dr = tA, dA/dt = rA$$

۱۰.۴.۲۰ مفهوم ۱۰: حساسیت PV

$$dPV/dr = -tPV/(1+r)$$

۱۱.۴.۲۰ مفهوم ۱۱: دیرش

$$D \approx t \text{ برای پرداخت واحد.}$$

۱۲.۴.۲۰ مفهوم ۱۲: NPV

بهینه‌سازی نسبت به متغیر تصمیم.

۱۳.۴.۲۰ مفهوم ۱۳: EOQ

$$Q^* = \sqrt{2DS/H}$$

۱۴.۴.۲۰ مفهوم ۱۴: لاگرانژ

$$\mathcal{L} = f - \lambda g$$

۱۵.۴.۲۰ مفهوم ۱۵: بتا

$$\beta = \text{Cov}(R_i, R_m) / \text{Var}(R_m)$$

۵.۲۰ مثال‌های حل شده

مثال حل شده

$$\text{مثال ۱: } C = 2q^2 + 30q + 500, C'(10) = 70$$

مثال حل شده

$$\text{مثال ۲: } P = 200 - 5Q, MR(20) = 0$$

مثال حل شده

مثال ۳: $P = 812.5, q = 22.5 : C = 30q + 200, R = 120q - 2q^2$

مثال حل شده

مثال ۴: $E = -1, Q = 500 - 5P$

مثال حل شده

مثال ۵: $MR = 60 : E = -4, P = 80$

مثال حل شده

مثال ۶: $P = 300 - 3Q$: حداکثر درآمد ۷۵۰۰.

مثال حل شده

مثال ۷: نرخ رشد ۱۵٪.

مثال حل شده

مثال ۸: $dA/dt(10) \approx 89.02, A = 500e^{0.08t}$

مثال حل شده

مثال ۹: $dPV/dr \approx -6785.5, PV \approx 933$

مثال حل شده

مثال ۱۰: دیرش ۸.

مثال حل شده

مثال ۱۱: $q = 100$ NPV.

مثال حل شده

مثال ۱۲: $EOQ \approx 632.46$.

مثال حل شده

مثال ۱۳: لاگرانژ: $R = 25, x = 4, y = 3$.

مثال حل شده

مثال ۱۴: مالیات: ۵.۱.

مثال حل شده

مثال ۱۵: $U'(50) = 4$, $U = 200 \ln x$

مثال حل شده

مثال ۱۶: $C = q^2 + 100q + 10000$: $q = 100$, $AC = 300$

مثال حل شده

مثال ۱۷: سود پس از مالیات ۲۰٪: ۱۶۰۰

مثال حل شده

مثال ۱۸: سربه سر: ۳۴.۱۴, $q \approx 5.86$

مثال حل شده

مثال ۱۹: اوراق: $PV \approx 747.26$

مثال حل شده

مثال ۲۰: ترکیبی: $q \approx 9.53$, $P \approx 503.8$

۶.۲۰ اشتباهات رایج

اشتباه رایج

افزایش قیمت همیشه درآمد زیاد نمی کند / $P \neq MR$ / $P'' < 0$ / علامت کشش / t در حساسیت / EOQ / لاگرانژ / بتا.

۷.۲۰ خلاصه فصل

کاربرد	فرمول	مفهوم
تولید	C'	MC
قیمت	R'	MR
بهینه	$MR - MC$	MP
حساسیت	$(dQ/dP)(P/Q)$	کشش
درآمد	$P(1 + 1/E)$	MR از کشش
اوراق	$-tPV/(1 + r)$	حساسیت PV
موجودی	$\sqrt{2DS/H}$	EOQ

۸.۲۰ خودآزمایی

۱.۸.۲۰ چهارگزینه‌ای (۱۵ سوال)

۱. $C = 3q^2 + 20q$ ، $MC(5)$: الف) ۳۰ ب) ۴۰ ج) ۵۰ د) ۶۰
۲. $P = 100 - 2Q$ ، $MR(20)$: الف) ۲۰ ب) ۴۰ ج) ۶۰ د) ۸۰
۳. حداکثر سود $P = -q^2 + 40q - 100$: الف) ۲۰۰ ب) ۳۰۰ ج) ۴۰۰ د) ۵۰۰
۴. $Q = 200 - 4P$ ، کشش در $P = 25$: الف) - ب) - ج) - د) -
۵. $E = -2$ ، $MR: P = 60$: الف) ۲۰ ب) ۳۰ ج) ۴۰ د) ۵۰
۶. حداکثر درآمد $P = 400 - 4Q$: الف) ۵۰۰۰ ب) ۷۵۰۰ ج) ۱۰۰۰۰ د) ۱۲۵۰۰
۷. نرخ رشد $S = 300e^{0.1t}$: الف) ۵٪ ب) ۱۰٪ ج) ۱۵٪ د) ۲۰٪
۸. $PV = ۱۰۰۰$ ، $r = 0.05$ ، $t = 10$: الف) ۵۰۰ ب) ۹۰۶۱۳ ج) ۷۰۰ د) ۸۰۰
۹. dPV/dr : الف) - ب) - ج) - د) -
۱۰. دیرش پرداخت واحد ۱۲ سال: الف) ۶ ب) ۱۲ ج) ۲۴ د) ۱
۱۱. $EOQ: D = 8000, S = 100, H = 4$: الف) ۴۰۰ ب) ۵۰۶۳۲ ج) ۸۰۰ د) ۱۰۰۰
۱۲. سهم مصرف‌کننده $E_d = -3$ ، $E_s = 2$: الف) ۶۰ ب) ۵۰۱ ج) ۳ د) ۵
۱۳. $AC = q + 100/q$ ، حداقل: الف) $q = 5$ ب) $q = 10$ ج) $q = 20$ د) $q = 100$
۱۴. $U = 100 \ln x$ ، $MU(20)$: الف) ۵ ب) ۱۰ ج) ۲۰ د) ۱۰۰
۱۵. بهترین معیار: الف) IRR ب) NPV ج) Payback د) ARR

۲.۸.۲۰ پاسخ

۱-ج، ۲-ج، ۳-ب، ۴-ب، ۵-ب، ۶-ج، ۷-ب، ۸-ب، ۹-الف، ۱۰-ب، ۱۱-ب، ۱۲-الف، ۱۳-ب، ۱۴-الف، ۱۵-ب

ایست بازرسی

پایان فصل ۲۰.

آ پیوست الف: فرمول‌نامه جامع

مجموعه‌ها

عنوان	فرمول
زیرمجموعه	$A \subseteq B \iff \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$
اجتماع	$A \cup B$
اشتراک	$A \cap B$
تفاضل	$A - B$
متمم	$A^c = U - A$
ضرب دکارتی	$A \times B$
تعداد زیرمجموعه	$2^{ A }$
شمول-طرد	$ A \cup B = A + B - A \cap B $

عنوان	فرمول
تابع خطی	$f = ax + b$
شیب	$a = \Delta y / \Delta x$
تابع درجه دوم	$ax^2 + bx + c$
رأس	$x_v = -b/(2a)$
ریشه	$(-b \pm \sqrt{\Delta})/(2a)$
نمایی	a^x
لگاریتمی	$\log_a x$

توابع

حد و پیوستگی

عنوان	فرمول
حد چپ/راست	$\lim^+, \lim^-$
شرط وجود	$\lim^- = \lim^+$
پیوستگی	$\lim = f(a)$
مثلثاتی ویژه	$\sin x / x \rightarrow 1$
نمایی ویژه	$(e^x - 1)/x \rightarrow 1$
فرم 1^∞	$(1 + 1/x)^x \rightarrow e$

مشتق

عنوان	فرمول
تعریف	$f' = \lim \Delta f / \Delta x$
توان	nx^{n-1}
ضرب	$f'g + fg'$
تقسیم	$(f'g - fg')/g^2$
زنجیره	$f'(g)g'$
نمایی	$a^x \ln a, e^x$
لگاریتمی	$1/x$

عنوان	شرط
نقطه بحرانی	$f'(c) = 0$
ماکسیمم	$f''(c) < 0$
مینیمم	$f''(c) > 0$
حداکثر سود	$MR = MC$
حداقل AC	$MC = AC$
EOQ	$\sqrt{2DS/H}$

عنوان	فرمول
ساده	$P(1 + rt), Prt$
مرکب	$P(1 + r)^t$
پیوسته	Pe^{rt}
EAR	$(1 + r/n)^n - 1$
PV	$FV(1 + r)^{-t}$
قسط	$Pr / (1 - (1 + r)^{-n})$
PV اقساط	$PMT(1 - (1 + r)^{-n}) / r$
FV اقساط	$PMT((1 + r)^n - 1) / r$
Perpetuity	PMT / r

بهینه‌سازی

مالی

دنباله‌ها

ب پیوست ب: جدول مشتقات پرکاربرد

پ پیوست ج: کلید فشرده پاسخ‌های چهارگزینه‌ای

ت پیوست د: منابع با ارجاع APA

- [۱] پورکاظمی، م. (۱۳۹۸). ریاضیات پایه برای مدیریت. تهران: انتشارات سمت.
- [۲] رنجبران، م. (۱۳۹۹). ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت. تهران: انتشارات مدرسان شریف.
- [۳] نیکوکار، م. (۱۳۹۷). ریاضیات عمومی. تهران: انتشارات پوران پژوهش.
- [۴] ساعتی، س. (۱۳۹۶). ریاضیات کاربردی برای مدیریت. تهران: انتشارات دانشگاهی.
- [۵] McGraw-Hill. *Business for Mathematics*. A. S. Salzman. (۲۰۱۷).
- [۶] T. S. Tan. (۲۰۱۹). *Sci- Social and Life, Managerial, the for Mathematics Applied*. Cengage. ences
- [۷] E. Ummer. (۲۰۱۸). *Rout- Finance and Business Economics, for Mathematics Basic*. ledge.

عنوان	فرمول
حسابی	$a_1 + (n - 1)d$
جمع حسابی	$\frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
هندسی	$a_1 r^{n-1}$
جمع هندسی	$a_1(1 - r^n)/(1 - r)$
S_∞	$ r < 1, a_1/(1 - r)$

تابع	مشتق
c	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$
$\sqrt[n]{x}$	$1/(n\sqrt[n]{x^{n-1}})$
$1/x$	$-1/x^2$
e^x	e^x
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} f'(x)$
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$1/x$
$\ln f(x)$	$f'(x)/f(x)$
$\log_a x$	$1/(x \ln a)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\csc x$	$-\csc x \cot x$
$\sin^{-1} x$	$1/\sqrt{1 - x^2}$
$\cos^{-1} x$	$-1/\sqrt{1 - x^2}$
$\tan^{-1} x$	$1/(1 + x^2)$

to Introduction An .(۲۰۲۰) A. T. Williams, & J., D. Sweeney, R., D. Anderson, [۸]
Cengage. .Science Management

فصل	کلید (به ترتیب سوال)
۱	ج، الف، ب، الف، ب، د، ج، ب، الف، ب
۲	ب، ب، الف، ج، ب، ج، الف، ب، ب، ج، ب، ب
۳	ب، الف، ب، الف، ب، ج، ج، ب
۴	ج، ب، ب، الف، ب، الف، ب، ب، ب، ج، ب، ج، ب
۵	الف، ب، الف، ب، ب، ج، ب، الف، ب، الف، الف، ب، ج، ب، ج
۶	ج، ب، ب، ب، ج، ج، د، ج، ب، ب، ب، ب، ب، ب
۷	ب، ب، ب، ب، ب، ب، ب، ب، الف، الف، ج، ج، ب، ب
۸	ج، د، ب، الف، الف، الف، الف، الف، ب، ج، ب، ج، ب، ب
۹	ب، الف، ب، ب، ب، ب، الف، الف، الف، الف، الف، ب، الف، ب
۱۰	ج، ج، ج، ب، ج، الف، ب، ب، د، د، ج، ج، ب، ب، ج
۱۱	الف، ب، ج، د، الف، الف، ب، الف، ب، ج، ب، د، ب، الف، ب
۱۲	د، ج، ب، الف، الف، الف، ب، الف، ب، الف، ج، ب، الف، ب، ب
۱۳	ب، الف، ب، ب، ج، الف، د، ب، ج، ج، ب، الف، ج، ج، ب
۱۴	ب، ج، ب، ج، ب، ب، ب، ب، ب، ب، الف، ب، الف، ج، الف
۱۵	الف، ب، ج، ج، ب، ب، ج، الف، ب، ج، ج، ب، الف، ب، ب
۱۶	ب، ب، الف، الف، ب، ج، الف، ج، ب، الف، د، ب، ج، ب، ب
۱۷	ب، ب، ب، الف، ج، الف، ب، ج، ب، ج، ب، ج، ب، ب، ب
۱۸	ب، ب، ب، ج، ج، ب، ج، ب، ج، ب، د، ج، ج، الف، ب
۱۹	الف، ب، الف، ج، ج، ب، ب، ب، ب، ب، ب، ج، ب، ب، ب
۲۰	ب، ج، ب، ب، ب، ج، ب، ب، الف، ب، ب، ب، ب، الف، ب

ث پیوست ه: واژه‌نامه فارسی-انگلیسی

ج پیوست و: پروژه ۷ روزه (نمونه)

پروژه ۷ روزه

پروژه ماژول ۱: مدل‌سازی مجموعه‌ای و تابعی یک فروشگاه اینترنتی
روز ۱: تعریف سه مجموعه (مشتریان، محصولات، خریده‌ها) + نمودار ون.
روز ۲: اجتماع، اشتراک، تفاضل + اصل شمول-طرد.
روز ۳: تابع هزینه $C(q) = 5q + 100$ + دامنه، برد، نمودار.
روز ۴: درآمد $R(q) = 20q$ + تابع سود + سربه‌سر.
روز ۵: رشد ۱۵٪ مرکب + زمان دوبرابر شدن.
روز ۶: قدر مطلق انحراف + جزء صحیح بسته‌بندی.
روز ۷: گزارش ۲ صفحه‌ای.

پروژه ۷ روزه

پروژه ماژول ۲: سیستم کد تخفیف و تحلیل احتمال
 روز ۱: کد ۶ کاراکتری (۲ حرف + ۴ رقم) + اصل ضرب.
 روز ۲: $P(5, 3)$ برای ۳ جایگاه.
 روز ۳: $\binom{10}{3}$ برای تیم.
 روز ۴: بسط $(x + 2)^5$ و ضرب x^3 در $(2x - 1)^6$.
 روز ۵: احتمال ۲ معیوب در نمونه ۵ از ۲۰.
 روز ۶: درخت تصمیم.
 روز ۷: گزارش.

پروژه ۷ روزه

پروژه ماژول ۳: تحلیل حد و پیوستگی تعرفه
 روز ۱: $\lim_{q \rightarrow \infty} (1000/q + 5)$ و $\lim_{q \rightarrow 10} (q^2 + 5q + 100)$.
 روز ۲: حد چپ/راست تعرفه پله‌ای.
 روز ۳: بررسی پیوستگی.
 روز ۴: IVT برای $P = -q^2 + 40q - 100$.
 روز ۵: حد AC در بی‌نهایت.
 روز ۶: تحلیل هزینه $0.01q^3 - 0.5q^2 + 100q + 5000$.
 روز ۷: گزارش.

پروژه ۷ روزه

پروژه ماژول ۴: بهینه‌سازی سود یک محصول
 روز ۱: مشتق $3x^4 - 2x^3 + 5x - 7$ + زنجیره‌ای.
 روز ۲: MR, MC .
 روز ۳: بهینه‌سازی سود با $P'(q) = 0$ و $P'' < 0$.
 روز ۴: حداقل AC .
 روز ۵: دیفرانسیل.
 روز ۶: لاگرانژ با محدودیت بودجه.
 روز ۷: گزارش.

پروژه ۷ روزه

پروژه ماژول ۵: ارزیابی طرح سرمایه‌گذاری
 روز ۱: بهره ساده vs مرکب.
 روز ۲: پیوسته + EAR.
 روز ۳: PV + حساسیت.
 روز ۴: قسط وام + جدول استهلاك.
 روز ۵: NPV و IRR.
 روز ۶: بهینه‌سازی NPV.
 روز ۷: گزارش.

چ پیوست ز: برنامه ۶۰ روزه

یادداشت

برنامه زیر برای ۹ هفته طراحی شده است. هر هفته: مطالعه فصل، تمرین، خودآزمایی، پروژه.

برنامه روزانه

- روزهای ۱-۵: مطالعه ۱-۲ ساعت + تمرین.
- روز ۶: خودآزمایی و رفع اشکال.
- روز ۷: پروژه و گزارش.

نامه‌ای به دانشجو

نامه‌ای به دانشجو

دانشجوی عزیز،

اگر از ریاضی می‌ترسی، بدان که این ترس، تقصیر تو نیست. ریاضی، نه یک استعداد مادرزادی است، نه یک دیوار بلند که فقط نابغه‌ها از آن بالا می‌روند. ریاضی، یک مهارت است — مثل دوچرخه‌سواری. هیچ‌کس با دوچرخه به دنیا نمی‌آید. همه اول زمین می‌خورند، زانویشان زخم می‌شود، و بعد یاد می‌گیرند. مدیریت، بدون ریاضی، مثل رانندگی با چشم‌پسته است. مدیرانی که ریاضی بلدند، می‌بینند؛ مدیرانی که بلد نیستند، حدس می‌زنند. و در دنیای امروز، حدس زدن، دیگر یک گزینه نیست. بعد از ۶۰ روز — اگر این جزوه را جدی بگیری — این سه مهارت را داری:

۱. مدل‌سازی: می‌توانی هر پدیده مدیریتی را به زبان ریاضی ترجمه کنی.
۲. تحلیل: می‌توانی رفتار یک سیستم را تحلیل کنی.
۳. تصمیم‌گیری: می‌توانی بین گزینه‌ها، بهترین را انتخاب کنی.

«ریاضی، زبان تصمیم‌های درست است؛

و تو، در حال یادگیری این زبان هستی.»

به خودت ایمان داشته باش. به مسیر اعتماد کن.

با احترام و امید،
مجید کوکبی

ایست بازرسی

پایان سند.

فارسی	انگلیسی
مجموعه	Set
زیرمجموعه	Subset
اجتماع	Union
اشتراک	Intersection
متمم	Complement
تابع	Function
دامنه	Domain
برد	Range
تابع خطی	Function Linear
تابع درجه دوم	Function Quadratic
سهمی	Parabola
رأس	Vertex
تابع نمایی	Function Exponential
تابع لگاریتمی	Function Logarithmic
حد	Limit
پیوستگی	Continuity
مشتق	Derivative
بهینه‌سازی	Optimization
ماکسیمم	Maximum
مینیمم	Minimum
نقطه بحرانی	Point Critical
نقطه عطف	Point Inflection
بهره ساده	Interest Simple
بهره مرکب	Interest Compound
بهره پیوسته	Compounding Continuous
ارزش فعلی	Value Present
ارزش آینده	Value Future
قسط	Annuity / Installment
صندوق ذخیره	Fund Sinking
کشش	Elasticity
هزینه نهایی	Cost Marginal
درآمد نهایی	Revenue Marginal
نرخ بازده داخلی	(IRR) Return of Rate Internal
ارزش فعلی خالص	(NPV) Value Present Net

هفته	فصل	تمرین	خودآزمایی	پروژه
۱	۳-۱	۱۰ مسئله مجموعه، تابع	سوالات هر فصل	ماژول ۱
۲	۵-۴	۱۰ مسئله نمایی، لگاریتمی، خاص	سوالات	ماژول ۱
۳	۷-۶	۱۵ مسئله شمارش و ترکیب	سوالات	ماژول ۲
۴	۹-۸	۱۰ مسئله نمودار و احتمال	سوالات	ماژول ۲
۵	۱۲-۱۰	۱۵ مسئله حد و پیوستگی	سوالات	ماژول ۳
۶	۱۵-۱۳	۱۵ مسئله دنباله و مشتق	سوالات	ماژول ۴
۷	۱۷-۱۶	۱۰ مسئله دیفرانسیل و بهینه	سوالات	ماژول ۴
۸	۱۹-۱۸	۱۵ مسئله بهره و اقساط	سوالات	ماژول ۵
۹	۲۰ + مرور	۱۰ مسئله مالی	مرور کل	ماژول ۵